Examen d'algèbre

Bacheliers en sciences mathématiques et physiques,
jeudi 2 septembre 2021

Consignes : Répondre aux parties théorie [Q. 1,2,3] / exercices [Q. 4,5,6] sur des feuilles distinctes. La clarté, la rédaction et la justification des réponses fournies interviennent dans la cotation. Enoncer les résultats utilisés. Bon travail.

Fin de l'examen : 12h00

1) [3 pts]

a) Définir la notion de zéro α-uple d'un polynôme.
Donner une caractérisation d'un tel zéro.

b) Soient $A \in \mathbb{C}_n^n$, $x, y \in \mathbb{C}^n$. Démontrer que $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle$.

c) Enoncer la règle de Descartes (concernant les zéros d'un polynôme).

2) [5 pts] AU CHOIX (ne répondez qu'à <u>une</u> des deux questions)

- Enoncer et <u>démontrer</u> la propriété comparant les multiplicités algébrique et géométrique d'une valeur propre d'un endomorphisme $T \in \mathcal{L}(E)$. On définira ces deux multiplicités.
- Enoncer et <u>démontrer</u> le théorème de la dimension (concernant l'image et le noyau d'une application linéaire).

3) [6 pts] <u>Vrai–Faux</u>. Justifier à chaque fois votre réponse par une preuve (énoncer un résultat théorique du cours peut suffire) ou un contre-exemple explicite.

a) Une matrice hermitienne est toujours diagonalisable.

b) Soit T une application linéaire. Si $\dim(\operatorname{Im} T) = \dim(\operatorname{Ker} T)$, alors T est injective.

c) Soit $P(z)$ un polynôme de degré au moins 2. Le polynôme P et sa dérivée $D_z P$ sont toujours premiers entre eux.

d) Toute matrice de $\mathbb{C}_2^2$ est diagonalisable.

e) Soient z_0 un nombre complexe et $P(z)$ un polynôme de degré au moins 2. Il existe un entier $j > 0$ tel que $(D_z^j P)(z_0) \neq 0$.

f) L'unique matrice $n \times n$ de trace nulle est la matrice nulle $0 \in \mathbb{C}_n^n$.

4) [5 pts] On considère l'application linéaire :

$$T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ x_1 + x_4 \\ x_2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \end{pmatrix}$$

a) Dans la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) de $\mathbb{R}^4$, représenter T.
b) Dans la base $(e_1 - e_2, e_1 + e_2, e_3 - e_4, e_3 + e_4)$ de $\mathbb{R}^4$, représenter T.
c) Donner une base du noyau de T, une base de l'image de T.
Vérifier le théorème de la dimension.
d) T est-il un isomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dans lui-même ?
Justifier votre réponse.

5) [5 pts] Décomposer en fractions simples sur $\mathbb{R}$, **puis sur** $\mathbb{C}$, la fraction rationnelle suivante

$$\frac{-x^3 + 7x^2 - 5x + 7}{(x-1)^2\,(x^2+1)}$$

6) [6 pts]
On considère la matrice

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 8 + 2\alpha & 2\alpha & -2 + 2\alpha \\ -1 - \alpha & 6 - 4\alpha & 1 - 7\alpha \\ -1 + 2\alpha & 2\alpha & 7 + 2\alpha \end{pmatrix}$$

a) Calculer le polynôme caractéristique de A et vérifier que les valeurs propres de A sont 2 et 3.
b) Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre $\alpha \in \mathbb{C}$, la matrice A est-elle diagonalisable ?
c) Quand A est diagonalisable, fournir une matrice inversible S telle que $S^{-1}AS$ soit diagonale. Fournir la matrice $S^{-1}AS$ correspondante.