Examen d'algèbre vendredi 20 août 2021
1ers bacheliers en sc. mathématiques et physiques

Consignes : Répondre à des questions différentes sur des feuilles distinctes. La clarté, la rédaction et la justification des réponses fournies interviennent dans la cotation. Enoncer les résultats utilisés. Bon travail.

1) [2 points] Définir

- Le déterminant d'une matrice carrée $A \in \mathbb{C}^n_n$.
- Le rang d'une matrice.

2) [5 points] Au CHOIX répondre à une des deux questions suivantes.

- Enoncer et démonter le théorème de Steinitz (concernant la dépendance linéaire de vecteurs).
- Définir la *somme directe* de $p \geq 2$ sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-vectoriel. Enoncer et démontrer une condition nécessaire et suffisante pour que $p \geq 2$ sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-vectoriel soient en somme directe (cette condition fait intervenir le fait que la somme de $p-1$ sous-espaces est directe).

3) [4 points] Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \beta & 3 & 0 \\ 0 & 1 & \beta & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer le déterminant de M.

b) Déterminer quand cette matrice est inversible en fonction du paramètre complexe β.

c) Quand la matrice n'est pas inversible, quel est son rang ?

d) On considère le système homogène $Mx = 0$. En fonction de β, préciser la dimension de l'ensemble des solutions.

4) [5 points] Dans le $\mathbb{R}$-vectoriel $\mathbb{R}^4$, on considère le sous-vectoriel

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \text{ et } x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \right\}$$

a) Donner une base de F.

b) Soit le sous-espace vectoriel G donné par

$$\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \langle .$$

Déterminer une base de $F \cap G$ et de $F + G$.

c) Donner deux supplémentaires distincts de F dans $\mathbb{R}^4$ (en fournissant explicitement une base de chacun d'eux).

5) [4 points] Vrai–Faux. Justifier à chaque fois votre réponse par une preuve (énoncer un résultat théorique du cours peut suffire) ou un contre-exemple explicite.

a) L'union de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.

b) Un système d'équations linéaires compatible possède toujours une solution unique.

c) Multiplier une colonne d'une matrice par un scalaire non nul ne change pas le rang de la matrice.

d) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie. Si $\dim F + \dim G = \dim E$, alors $E = F \oplus G$.