Introduction aux mathématiques discrètes

Bachelier ingénieur civil, Examen Août 2019

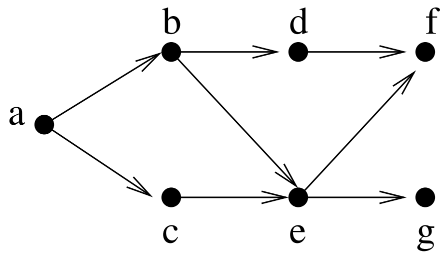
Il est attendu que les réponses fournies soient clairement justifiées. La clarté, la rédaction et la justification des réponses fournies interviennent dans la cotation de l'ensemble de l'examen. Bon travail !

Laissez **les pages agraffées**, inscrivez votre **nom et prénom** sur chaque page (coin supérieur droit).

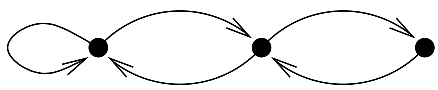
Examen **de 15h à 18h**.

1. [3 points]

a) Fournir les 12 tris topologiques du graphe suivant.



b) Pourquoi peut-on affirmer que le graphe suivant est primitif ? Rappeler la définition.



c) Pour des graphes ayant au moins 8 sommets, donner un exemple de graphe planaire et un exemple de graphe non planaire (justifier vos choix).

2. [4 points] Au Sudoku 4×4, le but du jeu est de remplir les cases avec des chiffres allant de 1 à 4 en veillant toujours à ce qu'un même chiffre ne figure qu'une seule fois par colonne, une seule fois par ligne, et une seule fois par carré de quatre cases (la grille étant composée de 4 tels carrés disjoints). Par exemple, une grille valide est donnée par

1	3	2	4
4	2	3	1
3	4	1	2
2	1	4	3

a) Modéliser le Sudoku 4×4 par un graphe à 16 sommets de telle sorte que les grilles valides correspondent exactement aux coloriages valides de ce graphe avec 4 couleurs (des sommets voisins reçoivent des couleurs distinctes). Combien ce graphe possède-t-il d'arêtes ? Suggestion : Pour vérifier votre construction, le graphe doit contenir 12 copies (pas nécessairement disjointes) de K_4 comme sous-graphes.

b) Le graphe obtenu est-il eulérien ? Justifier.

c) Montrer qu'il est hamiltonien en fournissant un circuit convenable.

d) Existe-t-il une valeur de k telle qu'il soit k-régulier ? En fonction de votre réponse, que pouvez-vous dire de la valeur propre de plus grand module (de la matrice d'adjacence) ?

3. [4 points] Soit un graphe planaire connexe dont toutes les faces sont des pentagones. Pour chaque face, 4 des 5 sommets constituant sa frontière appartiennent à exactement 3 faces et 1 sommet appartient à 5 faces. Déterminer le nombre de sommets, d'arêtes et de faces de ce graphe. En particulier, combien y-a-t-il de sommets de degré 3 et de degré 5 ?

4. [4 points] On considère le graphe complet K_p (graphe simple, non orienté, sans boucle).

a) Donner la matrice d'adjacence A de K_p.

b) Montrer que $(-1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{m}, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{p-m-2})$ est un vecteur propre de A pour $m = 0, \ldots, p-2$.

c) Déterminer les valeurs propres de A et leur multiplicité (on peut utiliser le point précédent).

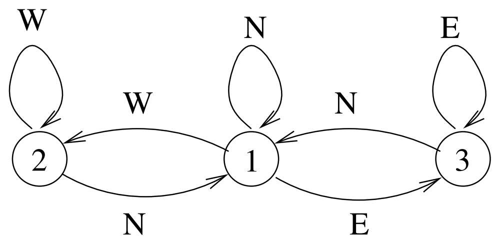
d) Montrer par récurrence sur $n \geq 0$ que le nombre de chemins de longueur n joignant deux sommets distincts vaut

$$\frac{1}{p}\left((p-1)^n - (-1)^n\right)$$

et que le nombre de chemins fermés de longueur n (partant et arrivant en un même sommet fixé) vaut

$$\frac{1}{p}(p-1)^n + \frac{p-1}{p}(-1)^n.$$

5. [5 points] On considère le graphe orienté représenté ci-dessous:



a) Soit $f(n)$ le nombre de chemins de longueur n débutant et arrivant au sommet 1. Montrer que $f(n)$ vérifie, pour tout $n \geq 0$, la relation de récurrence linéaire

$$f(n+3) = 3f(n+2) - f(n+1) - f(n)$$

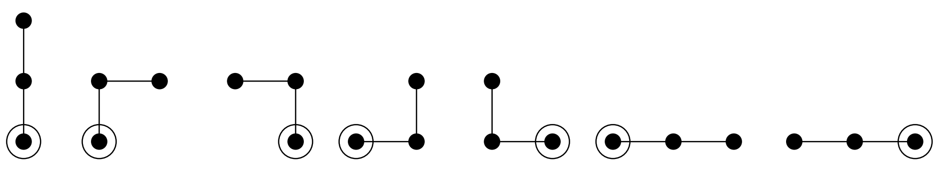
avec $f(0) = f(1) = 1$ et $f(2) = 3$.

b) Donner une formule close pour $f(n)$.

c) En déduire la valeur des limites suivantes (justifier votre réponse)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{(1+\sqrt{2})^n} \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{2^n}.$$

d) On considère les chemins dans le plan partant d'une origine fixe $(0,0)$ obtenus avec des pas du type $E = (1,0)$, $W = (-1,0)$ ou $N = (0,1)$ et ne s'intersectant pas, c'est-à-dire, qu'on interdit les pas consécutifs EW et WE. Soit $g(n)$ le nombre de tels chemins formés de n pas. Par exemple, $g(2) = 7$ et les chemins correspondants sont représentés ci-dessous.



Montrer que $g(n)$ vérifie la même relation de récurrence:

$$g(n+3) = 3g(n+2) - g(n+1) - g(n).$$

Suggestion: utiliser le graphe donné au point a).