

Examen écrit de théorie des graphes

Août 2018

Consignes : Il est attendu que les réponses fournies soient clairement justifiées. La clarté, la rédaction et la justification des réponses fournies interviennent dans la notation.

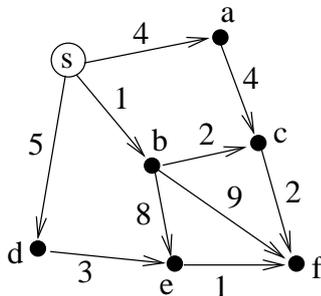
Bon travail !

Théorie (**uniquement** pour les étudiants ayant passé le projet)

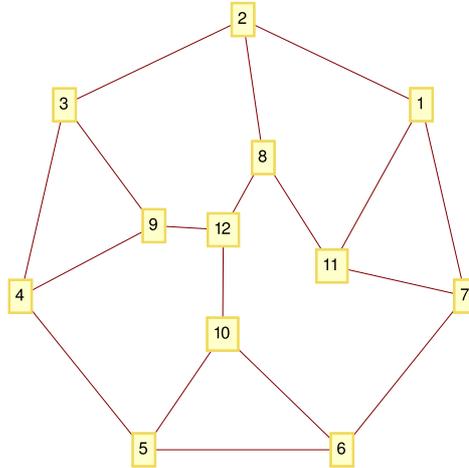
- (1) Décrire l'algorithme du PageRank :
 - a) Quel est le modèle de graphe retenu ?
 - b) Définir le PageRank d'une page.
 - c) Quelles sont les matrices construites, jusqu'à l'obtention de la "matrice de Google" ? Quelles sont leurs éventuelles propriétés ?
 - d) Comment est réalisé le calcul des PageRanks et sur quels résultats mathématiques se base-t-il ?
- (2) Définir les notions et, à chaque fois, donner un exemple de
 - a) graphe biparti,
 - b) tri topologique d'un graphe orienté,
 - c) graphe eulérien,
 - d) graphe planaire.

Exercices (**pour tous**)

- (1) (5 points)
 - a) Soit G un graphe simple connexe et non-orienté. Prouver que si G contient exactement un sommet de degré 1, alors G contient une piste fermée (on n'utilise pas deux fois la même arête).
 - b) Prouver qu'un graphe H simple et non-orienté est une forêt (union disjointe d'arbres) si et seulement si tout sous-graphe induit de H contient un sommet de degré au plus 1.
- (2) (5 points) Appliquer l'algorithme de Dijkstra au graphe orienté et pondéré suivant, de source s . On considérera les itérations successives de l'algorithme en fournissant les valeurs des variables $T(v)$ et $C(v)$ pour chaque sommet $v \neq s$ (poids actuel et chemin réalisé pour le sommet v)



- (3) (5 points) On considère le *graphe de Frucht* représenté ci-dessous.



- (a) Donner la matrice d'adjacence M de ce graphe.
 (b) Prouver que cette matrice M est primitive. (*Suggestion* : il n'est pas nécessaire d'en calculer explicitement des puissances.)
 (c) Sans faire le calcul, pourquoi les éléments diagonaux de M^2 sont-ils tous égaux à 3 ?
 (d) Même question avec M^3 , pourquoi ses éléments diagonaux sont-ils égaux soit à 2, soit à 0 ? On précisera lesquels sont nuls.
 (e) Prouver que ce graphe est hamiltonien.
 (f) Est-il eulérien ?
- (4) (5 points) On considère un graphe planaire connexe G ayant 32 faces triangulaires et 6 faces carrées. De chaque sommet de G partent quatre faces triangulaires et une face carrée. Déterminer le nombre de sommets et le nombre d'arêtes de G . Justifier votre raisonnement.