Examen écrit de théorie des graphes

Août–Septembre 2017

Consignes : Il est attendu que les réponses fournies soient clairement justifiées. La clarté, la rédaction et la justification des réponses fournies interviennent dans la cotation.

Bon travail !

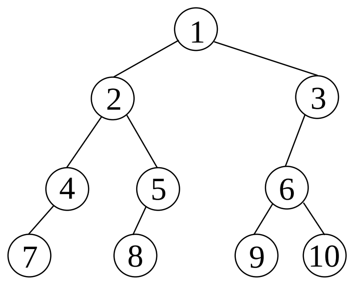
Théorie (**uniquement** pour les étudiants ayant passé le projet)

(1) Démontrer que le graphe complet K_5 n'est pas planaire.

(2) Définir la notion de tri topologique. Enoncer une condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe orienté possède un tel tri. Fournir un exemple sur un graphe à 5 sommets.

(3) Représenter un graphe simple orienté dont la matrice d'adjacence est
(a) primitive,
(b) irréductible mais non primitive.

(4) Soit l'arbre représenté ci-dessous. Fournir les parcours préfixe, infixe et suffixe des sommets.



Exercices (**pour tous**)

(1) (5 points) Un *matching parfait* d'un graphe simple (non-orienté) $G = (V, E)$ est un sous-ensemble $M \subseteq E$ tel que tout sommet de V est l'extrémité d'exactement une arête de M.

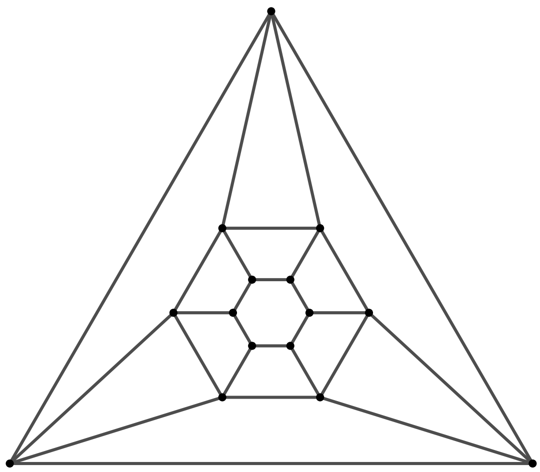
(a) Montrer que K_n possède un matching parfait si et seulement si n est pair.

(b) Combien de matchings parfaits distincts peut-on trouver dans le graphe biparti complet $K_{3,3}$?

(c) On considère un jeu entre deux joueurs A et B. On donne un graphe simple connexe G. Le joueur A débute la partie en choisissant un sommet. Les deux joueurs jouent alternativement en choisissant un sommet non choisi précédemment avec la contrainte de choisir un sommet voisin du dernier sommet sélectionné par l'autre joueur (autrement dit, A et B construisent ensemble un chemin). Le premier joueur incapable de jouer (il n'y a plus de sommet valide disponible) perd la partie. Montrer que si G a un matching parfait, alors B dispose d'une stratégie gagnante (quels que soient les sommets choisis par A, B pourra toujours gagner).

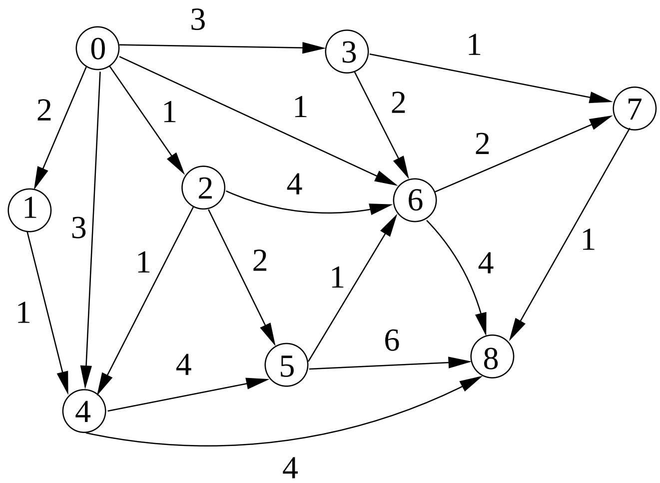
(d) Prouver qu'un arbre A a un matching parfait si et seulement si, pour chaque sommet v de A, le graphe $A - v$ possède une seule composante connexe ayant un nombre impair de sommets.

(2) (5 points) Soit le graphe G à 15 sommets représenté ci-dessous.



(a) Ce graphe est-il hamiltonien ? Quelle est sa fermeture ?
(b) Ce graphe est-il eulérien ? S'il ne l'est pas, ajouter au plus 3 arêtes pour le rendre eulérien.
(c) Montrer que G est un graphe 3-colorable (pour les sommets) qui n'est pas 2-colorable.
(d) Ce graphe est-il biparti ?
(e) Représenter le dual de cette représentation planaire de G. Quel est le nombre minimum de couleurs à utiliser pour colorer les faces cette représentation planaire de G, des faces adjacentes recevant des couleurs distinctes ?

(3) (5 points) Appliquer l'algorithme de Dijkstra (en rappelant la signification des variables utilisées) au graphe ci-dessous pour obtenir des chemins de poids minimal du sommet 0 vers les autres sommets.



(4) (5 points) On considère un graphe planaire connexe G ayant 20 faces triangulaires et 12 faces pentagonales. De chaque sommet de G partent deux faces triangulaires et deux faces pentagonales. Déterminer le nombre de sommets et le nombre d'arêtes de G.