

Examen écrit de théorie des graphes

Août 2016

Consignes : Il est attendu que les réponses fournies soient clairement justifiées. La clarté, la rédaction et la justification des réponses fournies interviennent dans la notation. Fin de l'examen : **11h30** (exercices seuls) — **12h00** (avec la théorie).

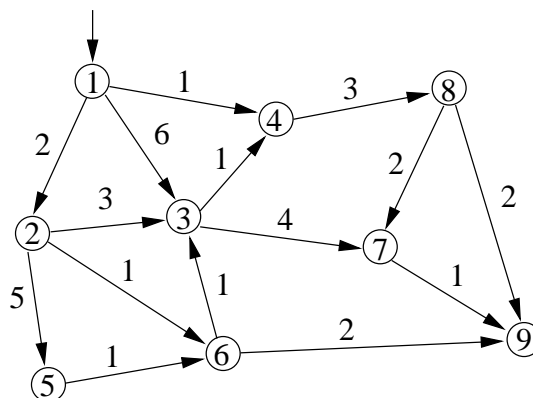
Bon travail !

Théorie (**uniquement** pour les étudiants ayant passé le projet)

- (1) Définir la notion de tri topologique.
- (2) Énoncer et démontrer une condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe soit eulérien.
- (3) Énoncer le théorème de Dirac.

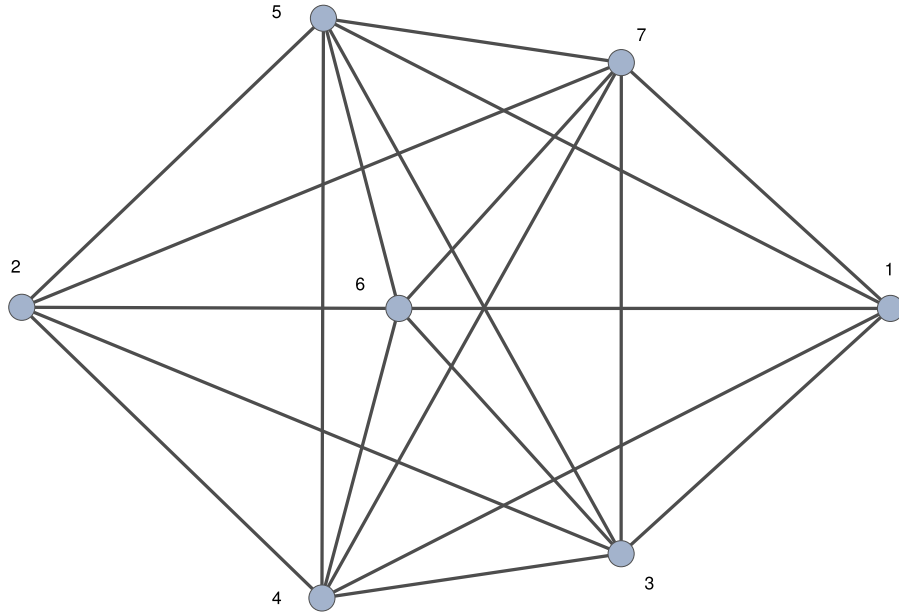
Exercices (**pour tous**)

- (1) (5 points) Appliquer l'algorithme de Dijkstra permettant d'obtenir un chemin de poids minimal du sommet 1 vers les autres sommets du graphe. On considérera les itérations successives de l'algorithme en fournissant les valeurs des variables $T(v)$ et $C(v)$ pour chaque sommet $v \neq 1$ (poids actuel et chemin réalisé pour le sommet v).



- (2) (3 points) Démontrer que le graphe biparti complet $K_{m,n}$ est hamiltonien si et seulement si $m = n$.
- (3) (2 points) Construire deux arbres non isomorphes ayant chacun 12 sommets dont 3 exactement sont de degré 3 et un unique sommet de degré 2.
- (4) (4 points) On considère un graphe planaire connexe G ayant trente faces limitées par quatre arêtes. De chaque sommet de G partent trois ou cinq faces. Déterminer le nombre total de sommets et le nombre d'arêtes de G . Déterminer également le nombre de sommets de degré 3 et 5 respectivement.

(5) (6 points) Soit le *graphe de Turan* G représenté ci-dessous.



- Ce graphe est-il hamiltonien ?
- Ce graphe est-il eulérien ?
- Ce graphe est-il planaire ?
- Fournir la matrice d'adjacence de ce graphe.
- Sachant que les valeurs propres sont $-1, 0, 2 + \sqrt{14}, 2 - \sqrt{14}$, peut-on en déduire que ce graphe est biparti ?
- Expliquer pourquoi il n'existe aucun coloriage propre des sommets du graphe avec moins de 6 couleurs. Donner un coloriage propre de G avec 6 couleurs.
- La matrice d'adjacence est-elle primitive ?