Examen écrit d'algèbre

Premier bachelier en sciences mathématiques,
Deuxième bachelier en sciences physiques,
août 2016

Consignes :

- Répondre à des questions différentes sur des feuilles distinctes et numérotées comportant chacune vos nom et prénom. Rendre au moins une feuille par question (même en cas d'abstention). Il est attendu que les réponses fournies soient clairement justifiées.
  La clarté, la rédaction et la justification des réponses fournies interviennent dans la cotation de l'ensemble de l'examen.
- Fin de l'examen à **12h30**

Bon travail !

1. [6 points] On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4-2\alpha & 2\alpha-2 & 1-\alpha & \alpha-1 \\ 0 & 3-\alpha & 0 & 0 \\ \alpha & -2\alpha & 2 & -\alpha \\ 2-\alpha & 2\alpha-4 & 1-\alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

a) A quelles conditions sur le paramètre $\alpha \in \mathbb{C}$, la matrice A est-elle diagonalisable ?

b) Quand $\alpha = 0$, vérifier que A est diagonalisable, fournir une matrice inversible S telle que $S^{-1}AS$ soit diagonale et fournir également cette dernière.

2. [5 points] On considère l'application linéaire :

$$T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_5 \\ x_2 + x_4 \\ x_3 \\ 2x_1 - x_2 - x_4 + 2x_5 \end{pmatrix}.$$

a) Dans des bases aux choix, représenter T.

b) Soit $V = (e_1, \ldots, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Déterminer une base U de $\mathbb{R}^5$ pour que la matrice $\mathcal{M}_{U,V}(T)$ représentant T dans les bases U et V ait ses deux premières colonnes égales à

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

⟶

c) Soit $W = (e_1, \dots, e_5)$ la base canonique de $\mathbb{R}^5$. Déterminer une base X de $\mathbb{R}^5$ pour que la matrice $\mathcal{M}_{W,X}(T)$ représentant T dans les bases W et X ait sa première colonne égale à

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

d) Donner une base du noyau de T et une base de l'image de T. Vérifier le théorème de la dimension.

e) T est-il surjectif ? Justifier votre réponse.

3. [2.5 points] Vérifier (méthode au choix) que les polynômes

$$P(z) = z^4 - 2z^2 + 1$$

et

$$Q(z) = z^3 - z^2 - 14z + 24$$

sont premiers entre eux.

4. [2.5 points] Soit la matrice M

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

On considère le point de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées $(3, 4)$ et on s'intéresse à la suite de points obtenue en appliquant de façon itérative la matrice M à ce point. Que vaut

$$\lim_{n \to +\infty} M^n \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} ?$$

5. [4 points]

a) Pour quelles valeurs de $w, z \in \mathbb{C}$, la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & i\,z & 0 \\ \overline{z} & z & 0 \\ 0 & 0 & w \end{pmatrix}$$

est-elle respectivement normale ou hermitienne ?

b) Montrer (on peut utiliser les résultats obtenus au point précédent) que la matrice suivante A est normale, construire une matrice unitaire U qui la diagonalise et fournir la matrice diagonale U^*AU correspondante,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$