Examen d'algèbre (première partie)
Premier bachelier en sciences mathématiques,
août 2016

Consignes : Répondre à des questions différentes sur des feuilles distinctes.
La clarté, la rédaction et la justification des réponses fournies interviennent dans la cotation. Enoncer les résultats utilisés. Bon travail.

1) Montrer que dans un espace vectoriel de dimension finie, deux bases quelconques ont le même nombre d'éléments.

2) Etablir la formule de changement de bases. On rapellera le contexte et les notations utilisées.

3) Vrai–Faux. Justifier à chaque fois votre réponse par une preuve (énoncer un résultat théorique du cours peut suffire) ou un contre-exemple explicite.

a. La somme de deux racines n-ièmes de l'unité a pour module 1.
b. Soient $n \geq 2$ un entier et τ une transposition de $\mathcal{S}_n$. Les applications $f : \mathcal{S}_n \to \mathcal{S}_n,\ \nu \mapsto \tau\nu$ et $g : \mathcal{S}_n \to \mathcal{S}_n,\ \nu \mapsto \nu\tau$ sont des bijections de $\mathcal{S}_n$ dans lui-même.
c. Si F et G sont deux sous-vectoriels distincts de $\mathbb{R}^4$, chacun de dimension 2, alors $F \oplus G = \mathbb{R}^4$.
d. Trois sous-espaces vectoriels sont en somme directe si leur intersection est réduite à $\{0\}$.
e. Soient x, y, z trois éléments d'un $\mathbb{R}$-vectoriel E. Les éléments x, y, z sont linéairement indépendants si et seulement si $x, 3\,y, \sqrt{5}\,z$ le sont.

4) Calculer le déterminant de la matrice suivante. Déterminer quand cette matrice est inversible en fonction du paramètre $\beta \in \mathbb{C}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \beta^3 \\ 1 & 0 & 2 & \beta^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \beta & \beta & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

5) Justifier que l'ensemble des solutions du système ci-dessous forme un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^4$. Quelle en est sa dimension ? Donner un élément non nul de F. Fournir une base d'un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 - 2x_2 + 2x_3 & = & 0 \\ 5x_3 + 3x_4 & = & 0 \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 - 3x_4 & = & 0 \end{array} \right. .$$

6) On considère le $\mathbb{C}$-vectoriel E des polynômes de degré au plus 3 à coefficients complexes et le sous-vectoriel F des polynômes de degré au plus 1 à coefficients complexes.

a. Montrer que les polynômes $z^3 - 1$, $z^3 - z^2 - 1$ et $z^2 + 1$ sont linéairement indépendants.
b. Compléter la partie libre du point a. pour en faire une base de E.
c. Montrer que l'application dérivée seconde D_z^2 est une surjection de E dans F.
d. Montrer que $G = \{az^2 + bz + c \mid a + b - c = 0,\ a, b, c \in \mathbb{C}\}$ est un sous-espace vectoriel de E. En donner une base.
e. Caractériser les éléments appartenant à $F \cap G$ et ceux appartenant à $F + G$.
f. Donner une base d'un supplémentaire de F dans E.