Examen écrit de théorie des graphes

Août–Septembre 2015

<u>Consignes</u> : Il est attendu que les réponses fournies soient clairement justifiées. La clarté, la rédaction et la justification des réponses fournies interviennent dans la cotation. Bon travail !

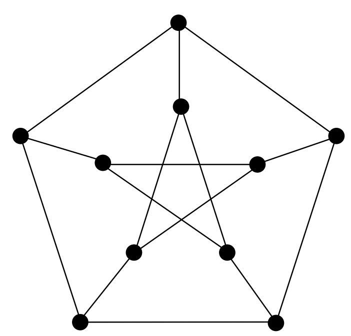
1.

a) Existe-t-il un groupe de 11 personnes tel que chaque membre du groupe connaisse exactement 3 autres personnes de ce groupe ?

b) Même question mais avec un groupe de 8 personnes (et chaque membre du groupe connaît exactement 3 autres membres du groupe).

Pour les deux points précédents, en cas de réponse affirmative, représenter un graphe illustrant la situation. Le graphe obtenu est-il toujours connexe ?

2. On considère le graphe de Petersen $P = (V, E)$ représenté ci-dessous



— Montrer que P contient un *chemin* hamiltonien.

— On considère le graphe obtenu en supprimant un sommet quelconque de P. Ce nouveau graphe possède-t-il un circuit hamiltonien ?

— Le graphe P est-il Eulérien ?

— Déterminer le nombre minimum de couleurs nécessaires pour avoir un coloriage propre des sommets de P.

— L'*excentricité* d'un sommet u est défini comme $\epsilon(v) = \max_{u \in V} d(v, u)$. Le *rayon* du graphe est défini comme $\min_{v \in V} \epsilon(v)$. Que vaut le rayon de P ?

— Donner la matrice d'adjacence de P. Vérifier (un argument simple suffit) que 3 en est une valeur propre.

3. Soit G un graphe simple non orienté possédant m arêtes $e_1, \ldots, e_m$. On définit le *graphe ligne* $L(G)$ comme le graphe ayant m sommets $v_1, \ldots, v_m$ et l'arête $\{v_i, v_j\}$ appartient à $L(G)$ si et seulement si les arêtes e_i et e_j de G sont adjacentes (i.e., ont une extrémité commune).

— Représenter le graphe ligne du graphe complet K_4, du graphe biparti complet $K_{2,3}$ et d'un cycle à 6 sommets.

— Donner une expression pour le nombre d'arêtes de $L(G)$ en fonction des degrés des sommets de G.

— Montrer que si G est un graphe simple k-régulier (i.e., chaque sommet est de degré k), alors $L(G)$ est $(2k-2)$-régulier.

4. On considère un graphe planaire G ayant 20 faces triangulaires et 12 faces pentagonales. De chaque sommet de G partent exactement 2 faces triangulaires et 2 faces pentagonales. Déterminer le nombre de sommets et d'arêtes de G.