# Examen écrit d'algèbre

Premier bachelier en sciences mathématiques,
Deuxième bachelier en sciences physiques,
septembre 2014

**Consignes** :

- Répondre à des questions différentes sur des feuilles distinctes et numérotées comportant chacune vos nom et prénom. Rendre au moins une feuille par question (même en cas d'abstention). Il est attendu que les réponses fournies soient clairement justifiées.
  La clarté, la rédaction et la justification des réponses fournies interviennent dans la cotation de l'ensemble de l'examen.
- Fin de l'examen à **12h00** (partie commune uniquement) – **13h00** (partie commune + partiel).

Bon travail !

**1.** On considère la matrice

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 8+2\alpha & 2\alpha & -2+2\alpha \\ -1-\alpha & 6-4\alpha & 1-7\alpha \\ -1+2\alpha & 2\alpha & 7+2\alpha \end{pmatrix}$$

a) Calculer le polynôme caractéristique de $A$ et vérifier que les valeurs propres de $A$ sont 2 et 3.

b) Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre $\alpha \in \mathbb{C}$, la matrice $A$ est-elle diagonalisable ?

c) Quand $A$ est diagonalisable, fournir une matrice inversible $S$ telle que $S^{-1}AS$ soit diagonale. Fournir la matrice $S^{-1}AS$ correspondante.

d) Quand $A$ n'est pas diagonalisable, quelles réductions à la forme de Jordan sont envisageables ?

**2.** Vrai–Faux. Justifier à chaque fois votre réponse par une preuve (énoncer un résultat théorique du cours peut suffire) ou un contre-exemple explicite.

a. Toute matrice hermitienne est unitaire.

b. Les matrices de $\mathbb{C}^7_7$ ayant $\chi(x) = (x-3)^2(x-5)^4(x+7)$ et $\mathcal{M}(x) = (x-3)(x-5)^2(x+7)$, respectivement comme polynôme caractéristique et minimum, à permutation de blocs près, n'ont qu'une réduction possible à la forme normale de Jordan.

c. Un polynôme à coefficients réels possède au moins un zéro réel.

d. Toute matrice de $\mathbb{R}^3_3$ possède une valeur propre réelle.

e. Le polynôme $\sum_{j=0}^{100} z^j$ possède un zéro de module au moins 3.

**3.** Soient deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ considéré comme $\mathbb{R}$-vectoriel,

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

On considère une application linéaire $T$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que

$$Tu_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } Tu_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Choisissez un vecteur $u_3$ tel que $U = (u_1, u_2, u_3)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$ (on gardera cette base tout au long de l'exercice). Dans cette base, donnez

$$\Phi_U(Tu_1) \text{ et } \Phi_U(Tu_2).$$

b) Soit l'ensemble $E$ formés des vecteurs $v \in \mathbb{R}^3$ tels que $Tu_3 = v$ et que le rang de $T$ vaut 2. Exhiber un élément appartenant à $E$. Cet ensemble est-il un sous-espace vectoriel ? Si oui, quelle en est sa dimension ?

c) Choisissez un vecteur $w$ tel que $Tu_3 = w$ et $T$ est un isomorphisme.

d) Si

$$Tu_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix},$$

représenter matriciellement $T$ dans la base $U$ et donner une base du noyau de $T$.

**4.** Décomposer en fractions simples sur $\mathbb{C}$ la fraction rationnelle suivante

$$\frac{1}{x(x-1)^2}.$$

---

$\star$ **Matière du partiel (uniquement 1BM)**

**5.** Etudier le rang de la matrice suivante, en fonction du paramètre $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda & 2 \\ 2 & \lambda & -1 & 3\lambda \\ \lambda & \lambda & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

**6.** Calculer $M^n$, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, où

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$