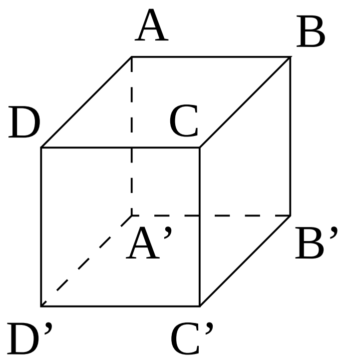
Examen écrit de géométrie

Premier bachelier en sciences physiques, septembre 2011

Consignes : Répondre à des questions différentes sur des feuilles distinctes et numérotées comportant chacune vos nom et prénom. Rendre au moins une feuille par question (même en cas d'abstention). Il est attendu que les réponses fournies soient clairement justifiées. Bon travail !

1.[4 points] Dans l'espace affin euclidien de dimension 3, on considère le cube représenté ci-dessous.



a) Montrer que les plans $AB'D'$ et $C'DB$ sont parallèles.
b) Montrer que la droite $A'C$ est perpendiculaire au plan $AB'D'$.
c) Si T est la projection orthogonale de C sur $AB'D'$, exprimer $d(A',T)$ en fonction de $d(A',C)$.

2. [4 points] Dans le plan affin euclidien, on considère un triangle ABC rectangle en A et une droite $\mathcal{D}$ passant par A. On note E la projection orthogonale de C sur $\mathcal{D}$. On note G la projection orthogonale de B sur $\mathcal{D}$. Soient $\mathcal{D}_1$ la droite passant par G et parallèle à AC et $\mathcal{D}_2$ la droite passant par E et parallèle à AB. Montrer que les droites BC, $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont concourantes.

3. [4 points] Soient E un espace vectoriel euclidien de dimension 3 orienté.
a) Soient i, j deux vecteurs unitaires orthogonaux et $k = i \wedge j$. Démontrer que pour tout vecteur $u \in E$, on a

$$i \wedge (u \wedge i) + j \wedge (u \wedge j) + k \wedge (u \wedge k) = 2u.$$

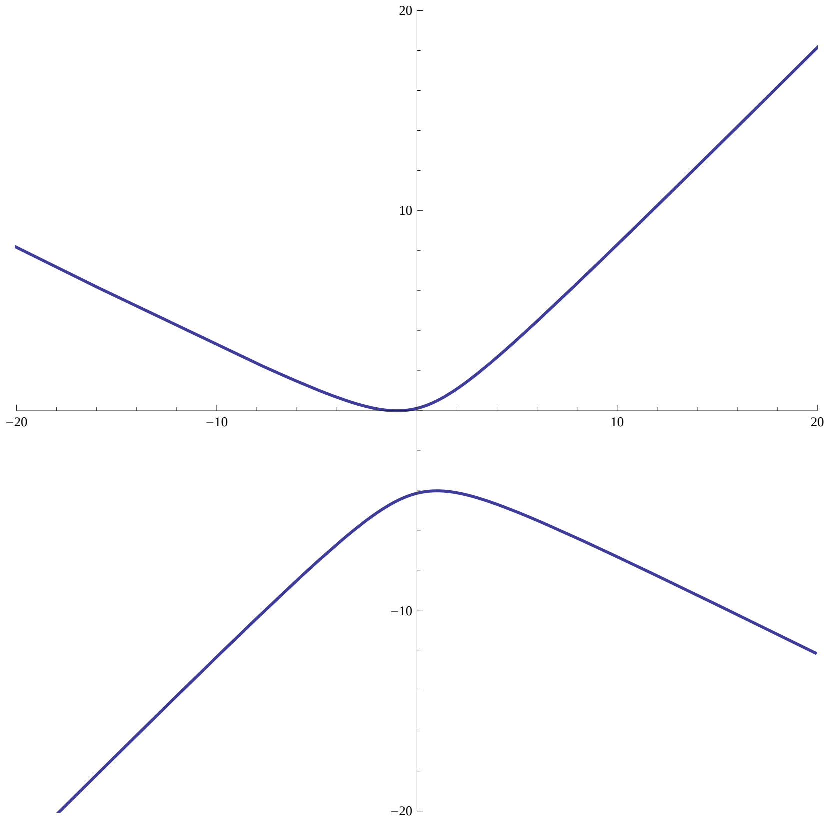
b) Démontrer que pour tous vecteurs w, x, y, z, on a

$$\langle w \wedge x, y \wedge z \rangle = \det \begin{pmatrix} \langle w, y \rangle & \langle w, z \rangle \\ \langle x, y \rangle & \langle x, z \rangle \end{pmatrix}.$$

$\longrightarrow$

4. [4 points] Dans le plan euclidien, on considère le paramétrage de courbe

$$P(t) = \left(\frac{t^2+2t-1}{t+1}, \frac{t^2}{t+1} \right),\ t \in \Omega = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$



a) Vérifier qu'il s'agit d'un arc régulier de courbe.
b) Donner l'équation de la tangente au point $P(-2)$
c) Déterminer toutes les valeurs du paramètre t pour lesquelles la courbe admet une tangente en $P(t)$ parallèle à la droite d'équation $y = x/2$.
d) Vérifier que l'arc régulier de courbe est invariant par symétrie centrale de centre $(0, -2)$.

5. [4 points] Soit a un paramètre réel. Dans l'espace affin euclidien de dimension 3 muni d'un repère orthonormé, on considère la droite $\mathcal{D}_a$ d'équations

$$\begin{cases} x = ay \\ y = az \end{cases}$$

et le plan π_a perpendiculaire à $\mathcal{D}_a$ et contenant le point de coordonnées

$$(a+1, 2-2a^2, a^3+1).$$

Montrer que les plans de la famille de plans $(\pi_a)_{a\in\mathbb{R}}$ ont une intersection et caractériser celle-ci. *Suggestion* : considérer l'intersection de 3 plans quelconques de la famille.