Examen écrit d'algèbre

Premier bachelier en sciences mathématiques,
août 2011

Consignes :

- Répondre à des questions différentes sur des feuilles distinctes et numérotées comportant chacune vos nom et prénom. Rendre au moins une feuille par question (même en cas d'abstention). Il est attendu que les réponses fournies soient clairement justifiées.
- Dans les exercices contenant plusieurs points, pour résoudre l'un de ceux-ci, on peut supposer acquis les résultats donnés précédemment.

Bon travail !

1. [7 points] Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & x & x \\ 0 & 1/2 & x & x \\ 0 & 0 & -1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & -1/4 \end{pmatrix}$$

a) Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre $x \in \mathbb{C}$, la matrice M est-elle diagonalisable ? En particulier, quand est-elle diagonalisable par une matrice unitaire ? Dans le cas où M est diagonalisable, on définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les suites réelles

$$z_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et

$$w_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les suites $(z_n)_{n\geq 0}$ et $(w_n)_{n\geq 0}$ convergent-elles ? Si oui, quelle en est la limite ? Si non, pourquoi ?

b) Si M n'est pas diagonalisable, quelle forme de Jordan peut-on obtenir ? Donner une matrice inversible S et la forme de Jordan $S^{-1}MS$ correspondante ainsi que le polynôme minimum de M.

2. [3 points] Montrer que les polynômes $P = X^4 + X^3 - 2X + 1$ et $Q = X^2 + X + 1$ sont premiers entre eux et trouver des polynômes U, V tels que

$$UP + VQ = 1.$$

3. [5 points] Soit $M \in \mathbb{R}_n^n$ et $\lambda = a + ib$ une valeur propre non réelle de M ($a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$). On note X un vecteur propre non nul de M de valeur propre λ.

a) Montrer que X appartient à $\in \mathbb{C}^n \setminus \mathbb{R}^n$.

b) Montrer que $\overline{X}$ est aussi vecteur propre de M et en déduire que $(X, \overline{X})$ est libre dans $\mathbb{C}^n$.

c) Soient

$$U = \frac{1}{2}(X + \overline{X}), \quad V = \frac{1}{2i}(X - \overline{X}).$$

Montrer que (U, V) est une partie libre de $\mathbb{R}^n$.

d) Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par U et V. Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ représenté par M dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Montrer que F est stable par φ et donner la matrice de $\varphi_{|F}$ dans la base (U, V).

4. [5 points] Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ une base d'un $\mathbb{C}$-vectoriel E de dimension n et $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E. Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$. On définit

$$F_i = \{T \in \mathcal{L}(E) \mid \operatorname{Im} T \subseteq \rangle e_i \langle\}$$

a) Vérifier que F_i est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

b) Caractériser les matrices représentant les éléments de F_i.

c) Montrer que $F_1 \oplus \cdots \oplus F_n = \mathcal{L}(E)$.

Matière du partiel. Soit $n \geq 2$. On considère la matrice

$$U = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_n^n$$

et le sous-ensemble

$$\mathcal{A} = \{aU + bI,\ a, b \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}_n^n.$$

a) Montrer que si R, S appartiennent à $\mathcal{A}$, il en est de même pour RS.

b) Montrer que si R, S appartiennent à $\mathcal{A}$, alors $RS = SR$.

c) Soit $M = aU + bI \in \mathcal{A}$. Montrer que M possède un inverse dans $\mathcal{A}$ si et seulement si $b(b + na) \neq 0$, et le cas échéant, donner M^{-1}.

d) Montrer que si $b(b + na) = 0$, alors $M = aU + bI \in \mathcal{A}$ n'est pas inversible dans $\mathbb{R}_n^n$.