Examen écrit d'algèbre

Deuxièmes bacheliers en sciences physiques,
août 2010

Consignes :

- Répondre à des questions différentes sur des feuilles distinctes et numérotées comportant chacune vos nom et prénom. Rendre au moins une feuille par question (même en cas d'abstention). Il est attendu que les réponses fournies soient clairement justifiées.

Bon travail !

1. [4 points] Soient $U = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$, $V = (f_1, f_2)$ une base de $\mathbb{R}^2$ et l'application linéaire $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ représentée dans ces bases par la matrice

$$\mathcal{M}_{U,V}(T) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

a) On considère les vecteurs $e'_1 = e_2 + e_3$, $e'_2 = e_3 + e_1$ et $e'_3 = e_1 + e_2$. Montrer que $U' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est encore une base de $\mathbb{R}^3$. Donner la matrice $\mathcal{M}_{U',V}(T)$ représentant T dans les bases U' et V.

b) On considère les vecteurs $f'_1 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$ et $f'_2 = \frac{1}{2}(f_1 - f_2)$. Sachant que $V' = (f'_1, f'_2)$ est une base, donner la matrice $\mathcal{M}_{U',V'}(T)$ représentant T dans les bases U' et V'.

2. [5 points] Soit la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Si possible, diagonaliser J. On fournira une matrice S et la matrice diagonale $S^{-1}JS$ correspondante.

b) Donner le polynôme minimum de J et en déduire que I, J, J^2, J^3, J^4 sont linéairement dépendants.

c) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré au plus 3. Montrer que si $P(J) = 0$, alors $P = 0$.

3. [3 points] Soit une matrice $A \in \mathbb{C}^{10}_{10}$ ayant pour polynôme caractéristique et minimum respectivement

$$\chi_A(x) = (x-1)^6(x-2)^4 \text{ et } \mathcal{M}_A(x) = (x-1)^3(x-2)^2.$$

La matrice A est-elle diagonalisable ? (Justifier) Si tel n'est pas le cas, donner toutes les formes de Jordan possibles et *essentiellement distinctes* (i.e., à permutation près des blocs de Jordan).

4. [5 points] Réduire à la forme canonique de Jordan la matrice suivante

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On fournira une matrice S et la matrice réduite $S^{-1}MS$ correspondante.

5. [3 points] Soit E un espace vectoriel de dimension finie et T un endomorphisme de E. Montrer explicitement que $\ker T \subseteq \ker T^2$ et que $\operatorname{Im} T \supseteq \operatorname{Im} T^2$. Démontrer ensuite que

$$\ker T = \ker T^2 \Leftrightarrow \operatorname{Im} T = \operatorname{Im} T^2.$$