Examen écrit d'algèbre

Premier bachelier en sciences mathématiques,
août 2010

Consignes :

- Répondre à des questions différentes sur des feuilles distinctes et numérotées comportant chacune vos nom et prénom. Rendre au moins une feuille par question (même en cas d'abstention). Il est attendu que les réponses fournies soient clairement justifiées.
- Pour les étudiants devant être réinterrogés sur la matière du partiel, le questionnaire relatif à cette partie ne sera pas distribué avant 10h30. Pour pouvoir sortir du local, il faut au préalable rendre la première partie de l'examen.
- Les étudiants qui ne sont pas réinterrogés sur la matière du partiel doivent rendre leurs solutions pour midi au plus tard.

Bon travail !

1. [6 points] On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & m & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -1 & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

a) Déterminer toutes les valeurs du paramètre réel m pour lesquelles M possède une valeur propre de multiplicité algébrique ≥ 2.

b) Pour une de ces valeurs (au choix), montrer que M n'est pas diagonalisable et donner la forme de Jordan correspondante (il n'est **pas** demandé de founir une matrice S permettant d'obtenir la forme de Jordan $S^{-1}MS$).

c) Pour $m = 3/4$, diagonaliser M. Fournir explicitement une matrice S et la matrice diagonale $S^{-1}MS$ correspondante

d) Pour $m = 3/4$, déduire du point précédent les limites suivantes

$$\lim_{n\to+\infty} M^{2n} \text{ et } \lim_{n\to+\infty} M^{2n+1}.$$

Pour rappel, une suite $(X_n)_{n\geq 0}$ de matrices *converge* vers un matrice L si pour tous i, j, la suite numérique $[X_n]_{i,j}$ converge vers $L_{i,j}$. En particulier, la suite $(M^n)_{n\geq 0}$ est-elle convergente ?

2. [3 points] Soit une matrice $A \in \mathbb{C}_9^9$ ayant pour polynôme caractéristique et minimum respectivement

$$\chi_A(x) = -(x-3)^4(x-6)^5 \text{ et } \mathcal{M}_A(x) = (x-3)^2(x-6)^2.$$

La matrice A est-elle diagonalisable ? (Justifier) Si tel n'est pas le cas, donner toutes les formes de Jordan possibles et *essentiellement distinctes* (i.e., à permutation près des blocs de Jordan).

3. [4 points] Soient $\theta \in [0, 2\pi[$ et $f_\theta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ l'application définie par

$$f_\theta(z) = e^{i\theta}\,\overline{z}.$$

On considère $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-vectoriel muni de la base $(1, i)$.

a) Montrer que f est $\mathbb{R}$-linéaire

b) Donner la représentation matricielle de cet endomorphisme dans la base $(1, i)$.

c) Existe-t-il $x, y \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tels que $f_\theta(x) = x$ et $f_\theta(y) = -y$? Si tel est le cas, déterminer un tel x et/ou un tel y. Les réponses fournies dépendent du paramètre θ.

d) Soit $\beta \in [0, 2\pi[$. Représenter matriciellement l'application $f_\theta \circ f_\beta$: $z \mapsto f_\theta(f_\beta(z))$ dans la base $(1, i)$.

4. [4 points] Soient $\mathbb{C}^2$ considéré comme $\mathbb{C}$-vectoriel et T un endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ tel que

$$T : \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

a) Caractériser les éléments de $\operatorname{Im} T$ et de $\ker T$.

b) Montrer explicitement que $\mathbb{C}^2 = \operatorname{Im} T \oplus \ker T$.

c) Quel argument permet de montrer que $\mathbb{C}^2 = \operatorname{Im} T \oplus \ker T$ sans pour autant caractériser $\operatorname{Im} T$ et $\ker T$?

5. [3 points] Montrer que le polynômes

$$P = X^4 + X^3 - 2X + 1 \text{ et } Q = X^2 + X + 1$$

sont premiers entre eux. Trouver $A, B \in \mathbb{R}[X]$ tels que $AP + BQ = 1$.

Examen écrit d'algèbre

Premier bachelier en sciences mathématiques,
août 2010

Fin de l'examen **12h30** !

6. [3 points] On considère l'ensemble S des matrices réelles $n \times n$ *stochastiques*, i.e., $A = (a_{i,j})$ appartient à S si et seulement si, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$. Montrer que la restriction du produit matriciel usuel à S est une opération interne, associative et possédant un neutre mais que cependant S muni du produit n'est pas un groupe.

7. [2 points] Soit φ un endomorphisme bijectif de $\mathbb{K}^n$ et F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ tel que $\varphi(F) \subset F$. Montrer que $\varphi^{-1}(F) \subset F$.

8. [3 points] Calculer pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n .$$

9. [2 points] Déterminer (en fonction du paramètre réel t) le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$