Examen écrit d'algèbre

Premier bachelier en sciences mathématiques,
lundi 31 août 2009

Consignes :

- Répondre à des questions différentes sur des feuilles distinctes et numérotées comportant chacune vos nom et prénom. Rendre au moins une feuille par question (même en cas d'abstention).
- Les étudiants qui ne sont pas réinterrogés sur la matière du partiel doivent rendre leurs solutions pour **midi** au plus tard. Les étudiants réinterrogés sur la matière du partiel doivent rendre leurs solutions pour **12h30**.

Bon travail !

1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. On considère deux endomorphismes S et T de E qui commutent et tels que $S + T = \mathrm{id}_E$.

a) Vérifier que $\ker S$ est un sous-espace vectoriel de $\ker(S \circ T)$.

b) Montrer que

$$\mathrm{Ker}\,(S \circ T) = \mathrm{Ker}\, S + \mathrm{Ker}\, T.$$

c) Vérifier que la restriction de S à $\mathrm{Ker}\,(S \circ T)$, notée $S|_{\mathrm{Ker}\,(S\circ T)}$, est un projecteur.

d) Montrer que $\mathrm{Ker}\, S$ et $\mathrm{Ker}\, T$ sont en somme directe.

2. Réduire à la forme canonique de Jordan la matrice de $\mathbb{C}_4^4$ suivante

$$\begin{pmatrix} 2 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On donnera la forme de Jordan obtenue ainsi que la matrice S permettant d'obtenir cette forme. On discutera la réponse en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{C}$.

3. Soit $\mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ l'espace vectoriel réel des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré au plus 3. Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère l'application

$$T : \mathbb{R}[X]_{\leq 3} \to \mathbb{R}^4,\ P \mapsto (P(a),\ (\mathrm{D}_X\, P)(a),\ \frac{1}{2}(\mathrm{D}_X^2\, P)(a),\ \frac{1}{6}(\mathrm{D}_X^3\, P)(a)).$$

a) Montrer que T est linéaire.

b) Représenter T dans les base $(1, X, X^2, X^3)$ et $(e_1, \ldots, e_4)$ où les e_i sont les vecteurs unitaires de la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

c) Trouver des bases de $\mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ et de $\mathbb{R}^4$ pour lesquelles T se représente par la matrice identité.

4. Soit la matrice
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha & \beta \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$
Déterminer pour quelles valeurs de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, l'application linéaire de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^4; \mathbb{R}^3)$ qui lui est associée est surjective.

5. Dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé, on considère la suite de points $(P_n)_{n\geq 0}$ où, pour tout $n \geq 0$, les coordonnées du point P_n sont notées (x_n, y_n). La suite de points $(P_n)_{n\geq 0}$ satisfait pour tout $n \geq 0$,
$$\begin{cases} x_{n+1} = -x_n + 2y_n \\ y_{n+1} = -3x_n + 4y_n \end{cases}$$

a) Montrer que pour tout point P_0, les points de la suite $(P_n)_{n\geq 0}$ sont alignés.
b) En fonction du point P_0 choisi initialement, l'ensemble $\{P_n \mid n \geq 0\}$ est-il borné ? Autrement dit, existe-t-il une constante $C > 0$ telle que pour tout $n \geq 0$, $|\overrightarrow{OP_n}| < C$? *Suggestion* : Commencer par exprimer matriciellement les coordonnées de P_{n+1} en fonction de celles de P_n.

——————— MATIERE DU PARTIEL ———————

6. Soient E un $\mathbb{C}$-vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que
$$F \cup G \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \Leftrightarrow F \subseteq G \text{ ou } G \subseteq F.$$
Soit H un troisième sous-espace vectoriel de E. Prouver que
$$G \subseteq F \Rightarrow F \cap (G + H) = G + (F \cap H).$$

7. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs suivants,
$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad x_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

a) $\dim\big(\rangle x_1, x_2 \langle \cap \rangle x_2, x_3, x_4 \langle\big) = 1$.
b) $\rangle x_1, x_2 \langle + \rangle x_2, x_3, x_4 \langle = \mathbb{R}^4$.
c) $\rangle x_1, x_2 \langle \oplus \rangle x_2, x_3, x_4 \langle = \mathbb{R}^4$.