“**Solution de l’exercice 4**”:

L’invité I a obtenu $2n-1$ réponses différentes. Chaque participant ne peut serrer qu’au plus $2n-2$ mains (il ne serre pas la main de son conjoint, ni sa propre main). Ainsi, les réponses obtenues pour le nombre de mains serrées sont tous les entiers entre 0 et $2n-2$ (il y a exactement $2n-1$ nombres pour les $2n-1$ participants différents de I).

A priori, on ne sait rien du nombre de mains serrées par I (il n’entre pas en compte dans les $2n-1$ réponses reçues). Nous faisons deux observations :

a) L’invité I ne peut pas avoir serré $2n-2$ mains. Pour le prouver, on procède par l’absurde. Si tel était le cas, I aurait serré toutes les mains (sauf celle de son conjoint). Dès lors, tous les participants (sauf le conjoint de I) ont au moins serré une main (celle de I). On en conclut que, dans les $2n-1$ réponses reçues par I, la seule personne ayant répondu 0 doit être le conjoint de I. Cependant, parmi les réponses reçues par I, quelqu’un (un participant différent de I) a serré $2n-2$ mains et donc ce participant devrait avoir serré la main du conjoint de I. Absurde.

b) L’invité I ne peut pas avoir serré 0 main. On procède encore par l’absurde. Si I n’a serré aucune main, alors son conjoint doit avoir serré $2n-2$ mains car tout autre participant qui aurait serré $2n-2$ mains aurait alors serré la main de I. Cependant parmi les réponses fournies, il y a un participant (distinct de I) qui a serré 0 main. Cela est en contradiction avec le fait que le conjoint de I a serré toutes les mains.

On en conclut qu’il existe un participant P_1 et son conjoint $\overline{P_1}$ qui ont serré respectivement $2n-2$ et 0 mains avec $P_1, \overline{P_1} \neq I$. Si on supprime ces deux individus et leurs poignées de mains, il reste $2n-2$ participants ayant tous serré la main de P_1 — en particulier, P_1 a serré la main de I et de son conjoint (observation importante pour le comptage final). Les $2n-3$ participants distincts de $I, P_1, \overline{P_1}$ avaient initialement fourni à I les réponses entre 1 et $2n-3$. Si on adapte ces réponses et qu’on soustrait, pour chaque participant, la poignée de main effectuée avec P_1 (ils ont tous serré la main de P_1), le nombre de mains serrées par les invités en excluant $P_1, \overline{P_1}$ sont les entienrs entre 0 et $2n-4$ (il y a exactement $2n-3$ nombres pour les $2n-3$ participants diférents de $I, P_1, \overline{P_1}$).

On peut à présent répéter les aguments précédents au sous-graphe privé de P_1 et $\overline{P_1}$. On en conclut qu’il existe un participant P_2 et son conjoint $\overline{P_2}$ qui ont serré respectivement $2n-4$ et 0 mains avec $P_2, \overline{P_2} \neq I$. Si on supprime ces deux individus et leurs poignées de mains, il reste $2n-4$ participants ayant tous serré la main de P_2 — en particulier, P_2 a serré la main de I et de son conjoint. Si on adapte les réponses fournies à I et qu’on soustrait, pour chaque participant, la poignée de main effectuée avec P_2 (ils ont tous serré la main de P_2), le nombre de mains serrées par les invités en excluant $P_1, \overline{P_1}, P_2, \overline{P_2}$ sont les entienrs entre 0 et $2n-6$.

On continue de la sorte jusqu’à avoir détecté $P_1, \ldots, P_{n-1}$ et leur conjoint. L’invité I et son conjoint ont exactement serré les $n-1$ mains de $P_1, \ldots, P_{n-1}$.