Examen de théorie des automates et langages formels

Master en sciences mathématiques, vendredi 28 janvier 2011

La clarté, la rédaction et la justification des réponses fournies interviennent dans la cotation de l'ensemble de l'examen.

1. On considère le langage $L = \{a, b\}^*bab$.

a) Donner l'automate minimal du langage L. (Vérifier que l'automate donné est bien minimal.)

b) Représenter la table de multiplication du monoïde syntaxique de L. En particulier, déterminer les classes d'équivalence de $\equiv_L$ qui contiennent une infinité d'éléments. Fournir un représentant de longueur ≥ 10 pour chacune de ces classes infinies.

c) Expliciter la fonction de complexité de L (plutôt qu'une méthode de résolution longue et systématique, un argument direct de comptage est souhaité).

2. Soit le langage $L = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 0 \text{ et } i \neq k\}$.

a) Le langage L est-il algébrique ? Justifier votre réponse. En cas de réponse affirmative, fournir une grammaire G telle que $L(G) = L$ et prouver que cette grammaire convient.

b) Fournir un automate à pile acceptant exactement L et dont l'alphabet de pile ne contient que deux symboles.

c) Le langage L est-il régulier ? Justifier votre réponse. En cas de réponse affirmative, donner un automate fini déterministe acceptant exactement L.

d) Caractériser les états de l'automate minimal du langage L.

3. Soient $n \geq 1$ un entier et Σ un alphabet fini. On dit qu'un langage $D \subseteq \Sigma^*$ est *n-défini* si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

i) pour tous mots x, y de longueur au moins n ayant le même suffixe de longueur n, $x \in D \Leftrightarrow y \in D$.

ii) il existe deux mots x, y de longueur au moins n ayant le même suffixe de longueur $n - 1$ tels que $x \in D$ et $y \notin D$.

a) Démontrer que tout langage n-défini est régulier.

b) Soit D un langage n-défini accepté par un automate fini déterministe $\mathcal{A} = (Q, q_0, \Sigma, F, \delta)$. Pour tout $j \geq 0$, on définit sur Q la relation binaire

$$q \sim_j r \Leftrightarrow (\forall w \in \Sigma^*)\big[|w| \geq j \Rightarrow (\delta(q, w) \in F \Leftrightarrow \delta(r, w) \in F)\big]$$

b.1) Vérifier que $\sim_j$ est une relation d'équivalence sur Q.

b.2) Montrer que $q \sim_j r \Rightarrow q \sim_{j+1} r$.

b.3) Prouver que, pour tout $j \in \{0, \ldots, n - 1\}$, il existe deux états $q, r \in Q$ tels que $q \not\sim_j r$ et $q \sim_{j+1} r$.

4. Soient x et w deux mots sur Σ. On pose $xw = u_1 \cdots u_\ell$ et $wx = t_1 \cdots t_\ell$, avec pour tout i, $u_i, t_i \in \Sigma$. Démontrer qu'on ne peut pas avoir $u_i = t_i$ pour tous les indices $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ sauf un. Autrement dit, il n'existe pas $j \in \{1, \ldots, \ell\}$ tel que $u_j \neq t_j$ et pour tout $i \neq j$, $u_i = t_i$.