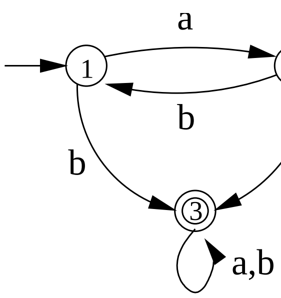
Examen écrit de théorie des automates et langages formels

Master en sciences mathématiques,
lundi 4 janvier 2010

1. Soit l'automate fini déterministe

$$\mathcal{A} = (Q = \{1, 2, 3\}, q_0 = 1, F = \{2, 3\}, \Sigma = \{a, b\}, \delta)$$

repris ci-dessous.



a. Vérifier que $\mathcal{A}$ est un automate minimal.
b. Donner une relation de récurrence linéaire pour la fonction de complexité $\rho_L(n)$ du langage accepté par $\mathcal{A}$ et obtenir une formule close pour $\rho_L(n)$.
c. Fournir la table de multiplication du monoïde syntaxique du langage accepté par $\mathcal{A}$. De là, déterminer si L est ou non sans étoile.
d. Pour tout $G \subseteq Q$, on définit l'automate $\mathcal{A}_G = (Q, 1, G, \Sigma = \{a, b\}, \delta)$ obtenu en modifiant l'ensemble des états finals de $\mathcal{A}$. Donner tous les sous-ensembles G pour lesquels $\mathcal{A}_G$ n'est pas minimal.

2. Soit le langage

$$L = \{w \in \{a, b\}^* : |\,|w|_a - |w|_b\,| \leq 1\}.$$

a. Montrer que L n'est pas régulier.
b. Caractériser les différents ensembles $w^{-1}.L$.
c. Donner un automate à pile acceptant L (montrer que l'automate fourni accepte exactement L).

3. Un langage L est *commutatif*, si pour tous x, y dans L, $xy = yx$. Montrer que L est un langage commutatif si et seulement si il existe un mot w tel que $L \subseteq w^*$. (Il est vous permis d'utiliser, <u>sans</u> preuve, tout résultat vu dans le cadre du cours).

4. On considère les mots w_n, $n \geq 1$, définis comme suit :

$$\begin{cases} w_1 = a \\ w_2 = b \\ w_n = w_{n-1}w_{n-2}, \ \forall n \geq 3. \end{cases}$$

Ainsi, par exemple, $w_3 = ba$ et $w_4 = bab$. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, w_n ne contient ni aa, ni bbb comme facteur.