# Examen écrit de théorie des automates et langages formels

Master en sciences mathématiques,
vendredi 23 janvier 2009

**1.** On considère les langages $L = \{u \in \{a,b\}^* \ : \ |u|_a \neq |u|_b\}$ et $M = L^2$.

a) Montrer qu'un mot non vide appartient à $\{a,b\}^* \setminus M$ si et seulement si il est de la forme $a(ba)^n$ ou $b(ab)^n$, avec $n \geq 0$.
(*Suggestion* : pour la condition nécessaire, montrer que si $u \in \{a,b\}^* \setminus M$, alors $|u|$ est impair. Ensuite, procéder par récurrence sur la longueur des mots envisagés.)

b) Construire l'automate minimal du langage $M$.

c) Donner une expression régulière pour $M$ et une formule close pour $\rho_M(n) = \#(M \cap \{a,b\}^n)$.

Les réponses fournies doivent être justifiées.

**2.** Soient $u, v$ deux mots sur un alphabet $\Sigma$. Le mot $v$ est un *conjugué* de $u$, s'il existe $x, y \in \Sigma^*$ tels que $u = xy$ et $v = yx$.

Montrer que si $u$ et $v$ sont des palindromes et si au moins l'un d'eux est de longueur pair, alors il existe un conjugué de $uv$ qui est un palindrome.

Montrer que si $u$ et $v$ sont des palindromes de longueur impaire, la propriété ci-dessus n'est pas nécessairement vérifiée.

**3.** Soient $u = u_1 \cdots u_\ell$ un mot où les $u_i$ sont des lettres et $r \leq \ell$. Pour tous $i_1, \ldots, i_r$ tels que $1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_r \leq \ell$, on dit que le mot $u_{i_1} \cdots u_{i_r}$ est une *sous-suite* de $u$. Par exemple, $bd$ est une sous-suite de $abcd$.

Montrer que le langage

$$L = \{x^R c y \mid x, y \in \{a,b\}^*, y \text{ est une sous-suite de } x\} \subseteq \{a,b,c\}^*$$

est un langage algébrique qui n'est pas régulier.

**4.** Soit $L_n$ le langage (régulier) formé des mots de longueur $\geq n$ sur $\{a,b\}$ dont la $n$-ième lettre en partant de la droite est un $a$. Montrer que tout automate fini déterministe acceptant $L_n$ possède au moins $2^n$ états.

**5.** Pour rappel, la clôture commutative d'un langage $L \subseteq \Sigma^*$ est définie par

$$\mathfrak{Com}(L) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists u \in L : \forall a \in \Sigma, |w|_a = |u|_a\}.$$

Si $L$ est un langage régulier, en est-il de même pour $\mathfrak{Com}(L)$ ? Justifier votre réponse.