

Examen écrit de théorie des automates et langages formels

Master en sciences mathématiques,
jeudi 24 janvier 2008

Fin de l'examen **midi**.

1. Fournir l'automate minimal du langage formé des mots sur $\{a, b\}$ ayant un nombre pair de a et ne contenant pas le facteur bb . Vérifier que l'automate proposé est bien minimal.

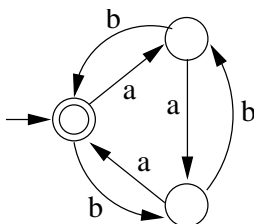
2.a) Soit \mathcal{M} un automate fini déterministe ayant n états. Démontrer que $L(\mathcal{M})$ est vide si et seulement si l'automate n'accepte aucun mot de longueur $< n$.

2.b) Dédurre du point précédent la propriété suivante. Soient \mathcal{A} et \mathcal{B} deux automates finis déterministes sur un même alphabet et ayant respectivement m et n états. Montrer que ces automates sont équivalents (i.e., $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{B})$) si et seulement si ils acceptent exactement les mêmes mots de longueur $< mn$.

3. On considère un alphabet binaire $\Sigma = \{a, b\}$. Un mot non vide $w \in \Sigma^*$ est *primitif* s'il n'est puissance (entière) d'aucun mot plus court. Autrement dit w est primitif si pour tous $v \in \Sigma^*$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $w = v^n$, alors $n = 1$ et $v = w$.

- Montrer que si w est un mot non vide primitif qui peut s'écrire uv , $u, v \in \Sigma^*$, alors vu est aussi primitif.
- L'ensemble P des mots primitifs sur $\Sigma = \{a, b\}$ est-il régulier ? Justifier votre réponse. (*Suggestion* : qu'en est-il de $\Sigma^* \setminus P$?).

4. Pour l'automate (minimal) suivant



- Exprimer sous forme synthétique (en exprimant la propriété qui caractérise ses éléments) l'ensemble L des mots acceptés.
- Donner la table de multiplication du monoïde syntaxique de L .
- Le langage L est-il sans étoile ? Justifier.
- Exprimer, à l'aide d'une formule close, le nombre de mots de longueur n appartenant à L ?

5. Le langage suivant est-il hors contexte

$$L = \{b^i a^j b^k a^k b^{2j} a^{3i} \mid i, j, k \geq 0\} ?$$

Justifier vos résultats.