

Examen écrit de théorie des automates et langages formels

Licence en sciences mathématiques,
vendredi 16 janvier 2003

1. On considère l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$.

a) Donner l'automate minimal du langage $L = a^*b^*c^*$ (dans votre réponse, justifier en quoi l'automate que vous proposez est minimal).

b) Quelles sont les classes d'équivalence de Σ^* pour la relation de Nerode \sim_L et quels sont les différents ensembles de la forme $w^{-1}.L$, $w \in \Sigma^*$?

c) La clôture commutative de L donnée par

$$\text{com}(L) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists v \in L, \forall \sigma \in \Sigma : |w|_\sigma = |v|_\sigma\}$$

est-elle un langage régulier ? Justifier.

2. On considère l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ et le langage régulier sur Σ formé des mots ne contenant pas le facteur "aa". Ce langage est accepté par l'automate fini déterministe $\mathcal{A} = (\{1, 2, 3\}, 1, \{1, 2\}, \Sigma, \delta)$ où la fonction de transition $\delta : \{1, 2, 3\} \times \Sigma \rightarrow \{1, 2, 3\}$ est donnée par

δ	a	b	c
1	2	1	1
2	3	1	1
3	3	3	3.

a) Donner une relation de récurrence linéaire pour la suite

$\rho_L(n) = \#(L \cap \Sigma^n)$ comptant le nombre de mots de longueur n dans L .

b) Par une méthode au choix, en déduire une formule close pour $\rho_L(n)$.

3.a) Montrer que le langage des représentations binaires des nombres entiers divisibles par 4 est régulier, en donnant une expression régulière.

b) Montrer que le langage des représentations binaires des nombres entiers divisibles par 3 est régulier, en fournissant un automate fini déterministe acceptant ce langage (ou son miroir, au choix).

c) Déduire des deux premiers points que le langage des représentations binaires des nombres entiers divisibles par 12 est régulier ? Justifier votre réponse.

4.a) Fournir une grammaire hors contexte générant le langage

$$L = \{a^i b^j c^j d^{2i} \mid i, j \in \mathbb{N}\}.$$

b) Fournir une grammaire hors contexte générant le langage formé des mots sur $\{a, b, c\}$ qui commencent par a , se terminent par bac et qui comprennent un nombre pair de c .