Premiers bacheliers en sciences mathématiques
Exercices d'entraînement

1) On considère la permutation

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 7 & 4 & 1 & 2 & 9 & 10 & 8 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

- Déterminer les éventuels points fixes de μ.
- Décomposer μ en un produit de cycles disjoints.
- Décomposer μ en un produit de transpositions.
- Quelle est la signature de μ ?
- Déterminer la permutation $\mu^2 = \mu \circ \mu$. Quels en sont les points fixes ?

2) On appelle *ordre* d'une permutation ν, le plus petit entier $p > 0$ tel que $\nu^p = id$. Avec la permutation μ donnée ci-dessus, quel est l'ordre de μ ? Déterminez ensuite l'ordre de μ^2, μ^3, μ^4 et μ^5.

3) Trouver l'ordre maximal d'une permutation de $\mathcal{S}_{10}$. Donner un exemple d'une permutation ayant cet ordre. Pourriez-vous décrire une méthode pour trouver l'ordre maximal d'une permutation de $\mathcal{S}_n$ pour un entier $n \geq 2$ quelconque ?

4) On considère l'application $f : \{1, \ldots, 10\} \to \{1, \ldots, 10\}$ définie par

$$f : x \mapsto \begin{cases} x + 5 & \text{si } 1 \leq x \leq 5 \\ x - 5 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démontrer qu'il s'agit d'une permutation de $\{1, \ldots, 10\}$.

5) Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Prouver que pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$M^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} & \frac{1}{2}(n-1)n\alpha^{n-2} \\ 0 & \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & 0 & \alpha^n \end{pmatrix}.$$

6) Déterminer les matrices qui commutent avec la matrice suivante

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$