Premiers bacheliers en sciences mathématiques
Exercices d'entraînement (2)

1) Soit $\omega = e^{2i\pi/3}$. Calculer

$$\det \begin{pmatrix} 0 & \omega & \omega^2 \\ \omega & 0 & 1 \\ \omega^2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) Montrer que la matrice suivante de $\mathbb{C}^3_3$ est inversible et calculer son inverse

$$\begin{pmatrix} 2-i & i & 1 \\ i & 1 & 1+i \\ 3-i & i & 2 \end{pmatrix}.$$

3) On considère la matrice $A \in \mathbb{R}^n_n$ donnée par $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ où

$$a_{i,j} = \delta_{i+1,j} \quad \forall i,j \in \{1,\ldots,n\}.$$

Calculer A^k pour tout entier $k \geq 1$.

4) Soient $\beta_0,\ldots,\beta_{n-1},\gamma_0,\ldots,\gamma_{n-1}$ des nombres réels. On définit les matrices $B = (b_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ et $C = (c_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ par

$$b_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{si } i > j; \\ \beta_{j-i}, & \text{sinon} \end{cases} \qquad c_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{si } i > j; \\ \gamma_{j-i}, & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Exprimer B (et C) comme une combinaison linéaire de puissances de la matrice A définie à l'exercice 3).
- En déduire que $BC = CB$ (Suggestion : deux polynômes d'une même matrice commutent).

5) Calculer

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & \\ -1 & 1 & 2 & & & \\ & -2 & 1 & 3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 & n-1 \\ & & & & -(n-1) & 1 \end{pmatrix}$$