

Devoir

Premier bachelier en sciences mathématiques,
30 octobre 2017

1 ★) A quelles conditions sur $\alpha \in \mathbb{C}$, la matrice suivante est-elle inversible ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+i & 2 & -i \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & i & \alpha & 1 \\ \alpha & i & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2 ★) Quel est le rang de la matrice 4×5 suivante ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+i & 2 & -i & 1 \\ 2 & i & 0 & 1 & 0 \\ 2 & i & 1 & 0 & 2 \\ 5-4i & 1+2i & 1 & -i & 5 \end{pmatrix}$$

3 ★★) Calculer l'inverse de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'une façon générale, à quelles conditions la matrice par blocs suivante est-elle inversible (A et B sont des blocs carrés, pas nécessairement de même dimension) ?

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Donner la forme de la matrice inverse correspondante.

4 ★★) Justifier le fait que si on ajoute à une rangée (ligne ou colonne) d'une matrice, une combinaison linéaire des autres rangées, on ne modifie pas le rang de cette matrice.

5 ★★) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Discuter la valeur du rang de la matrice en fonction de a et b

$$\begin{pmatrix} b & b & b-a \\ a-b & -b & a \\ a+b & b & 0 \end{pmatrix}.$$

6 ★★★) Pour aller (bien) plus loin, il est possible de définir une notion d'*inverse généralisé*. Voir, par exemple, l'article "M. James, The generalised inverse, *The Math. Gazette* Vol. **62**, No. 420 (1978), 109–114" disponible en téléchargement depuis toute machine ULg:
<http://www.jstor.org/stable/3617665>