Devoir

Premier bachelier en sciences mathématiques,
4 octobre 2017

1 $\star$) Calculer

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 2 & 0 \\ 3 & -1 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & x \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pour quelles valeurs de x le polynôme obtenu s'annule-t-il ?

2 $\star$) En considérant des matrices dont les éléments appartiennent au champ à trois éléments $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ (les tables d'addition et de multiplication ont été vues au cours). Vérifier que

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = I.$$

3 $\star\star$) On considère l'ensemble des matrices de $\mathbb{R}^2_2$. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Montrer qu'une matrice B commute avec A si et seulement si il existe $r, s \in \mathbb{R}$ tels que

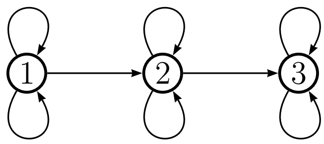
$$B = r\,I + s \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4 $\star\star$) Quelle est la forme générale, pour $n \in \mathbb{N}$, de

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^n$$

Suggestions : 1) Calculer les premières puissances de la matrice pour déterminer la forme générale d'une puissance n-ième. 2) Prouver, par récurrence sur n, que la forme obtenue convient.

Pour aller plus loin : Soit $c_{1\to 3}(n)$ le nombre de chemins de longueur n joignant le sommet 1 au sommet 3 dans le graphe suivant.



Par exemple, $c_{1\to 3}(3) = 6$. Pour quelle valeur de k, la limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{c_{1\to 3}(n)}{2^n n^k}$$

est-elle finie et strictement positive?

5 $\star\star$) Démontrer que le produits de deux matrices carrées $n \times n$ triangulaires supérieures est encore triangulaire supérieure.

6 $\star\star\star$) Pour tout nombre naturel $n > 0$, il existe $\ell \geq 0$ tel que

$$n = \sum_{i=0}^{\ell} c_i\, 2^i$$

avec des "chiffres" $c_i \in \{0, 1\}$ pour tout i et $c_\ell = 1$. On dit que $c_\ell \cdots c_0$ est la représentation en base 2 de n. Soit $f : \{0, 1\} \to \mathbb{N}_2^2$ définie par

$$f(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad f(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

A l'entier n représenté par $c_\ell \cdots c_1 c_0$, on associe le produit

$$s_2(n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot f(c_0) \cdot f(c_1) \cdots f(c_\ell) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que $s_2(n)$ est la somme des chiffres apparaissant dans la représentation en base 2 de n. Comment généraliser ce résultat aux nombres écrits en base $k \geq 2$ (dans ce cas, les chiffres appartiennent à $\{0, 1, \ldots, k-1\}$)?