TP 1, ex. supplémentaire 9

Si les réponses obtenues sont toutes 2 à 2 $\neq^{\text{tes}}$

on a les réponses

$$\underbrace{0, 1, 2, \ldots, 2n-3, 2n-2}$$

les 2n-1 réponses fournies à I
En effet, personne ne peut serrer
2n-1 mains (car on ne serre pas
la main à soi-même, ni à son conjoint)

1) Si une personne P serre 2n-2 mains,
cela signifie que les 2n-2 invités (sauf M^r et M^{me} P)
ont serré au moins la main de P (donc au moins 1 main).

$\Rightarrow$ Seul le conjoint de P a pu serrer 0 main

2) On ne peut avoir $P = M^r$ ou M^{me} I
car sinon il resterait comme réponses possibles

$$\underbrace{1, 2, \ldots, 2n-3}$$

2n-3 valeurs, alors qu'on dit dans
l'énoncé 2n-1 valeurs
différentes.

même avec
la réponse de M^{me} I,
on a 2n-2 valeurs

Au vu de 1) et 2), on a 1 premier couple ayant
serré 0 et 2n-2 mains respectivement

Si on retire ce couple, il reste 2n-3 personnes (I exclu)
et si on retire les poignées de mains de ce couple,
il reste les valeurs 0, 1, 2, ..., 2n-4

on peut répéter les arguments 1) et 2)

Avec ce sous-ensemble, on va trouver une personne ayant serré $2n-4$ mains et son conjoint 0 et ce couple est ≠ du couple Mr, Mme I.

Rem : par rapport à l'ensemble initial, ce couple a serré $2n-4+1 = 2n-3$ mains
$0+1 = 1$

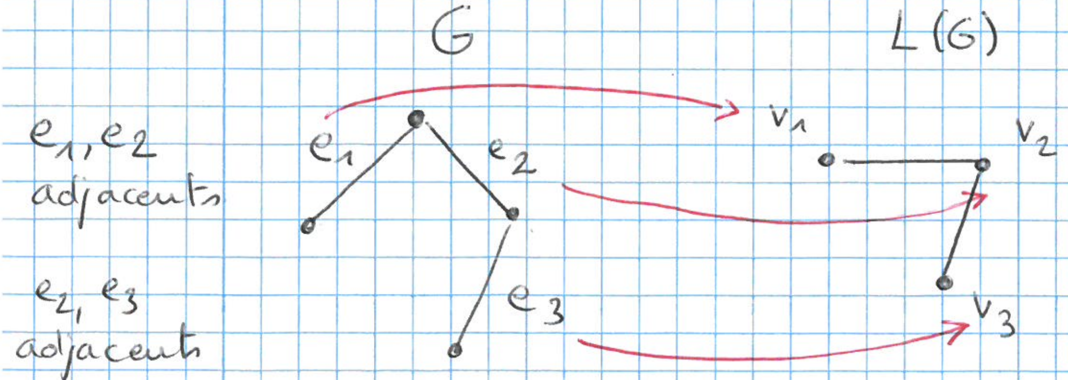
à chaque fois, on répète :

$$\underbrace{(2n-2,0),\ (2n-3,1),\ (2n-4,2),\ \ldots}_{\text{on ne peut pas avoir Mr, Mme I avant la dernière étape.}},(n-1,n-1$$

Conclusion : Mr, Mme I ont serré, chacun, $n-1$ mains

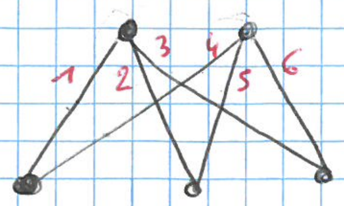
ex 10

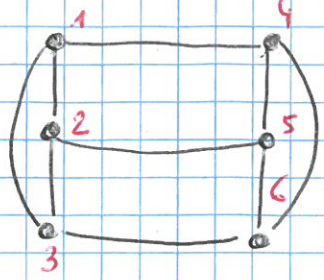
il faut bien comprendre la définition de $L(G)$

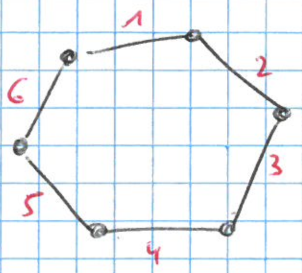


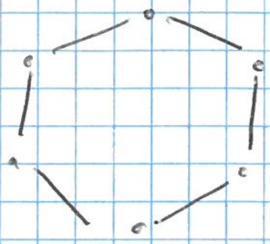
les arêtes de G donnent les sommets de $L(G)$

a) $K_{2,3}$ $L(K_{2,3})$

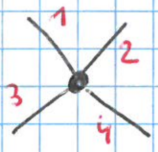








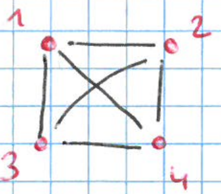
b) Si dans G, on a un sommet



de degré d

il donne dans L(G) : $\underbrace{K_{d,}\quad \text{arêtes}}$

des arêtes adjacentes ds G donnent des sommets voisins ds L(G)



càd C_{d}^{2} arêtes.

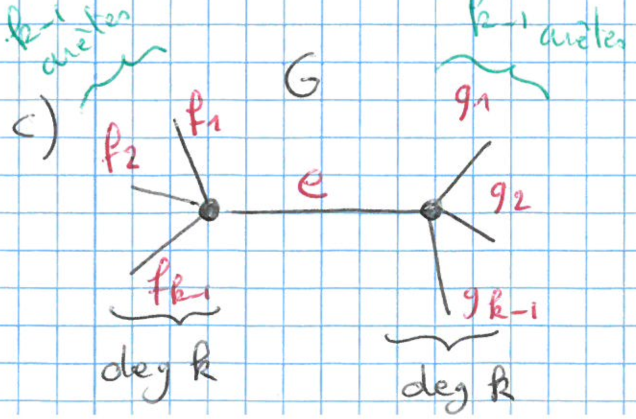
On le voit avec le a)

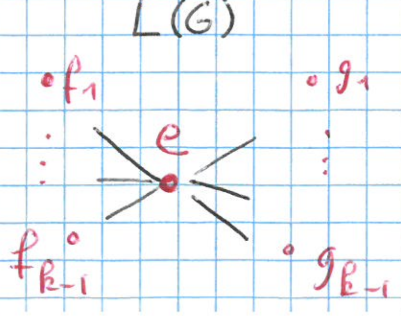
dans $L(K_{2,3})$ on a $2\times$ K_3 6 arêtes

$3\times$ K_2 3 arêtes

9 arêtes

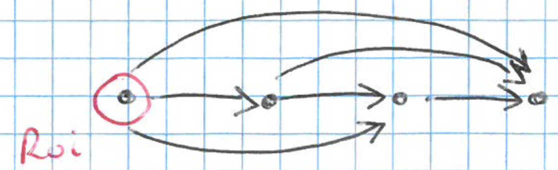
c)



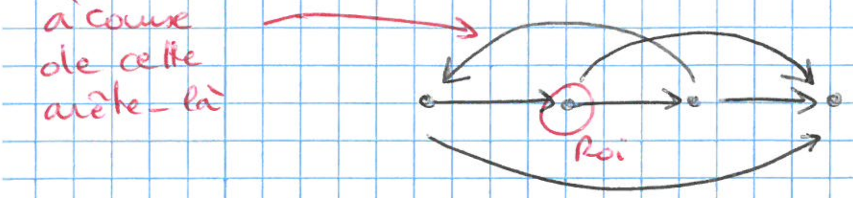


Ex 11

a)



tournoi transitif



non transitif

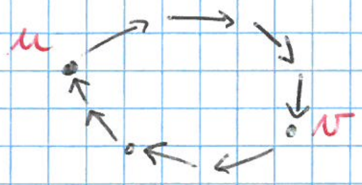
b) Vu la déf d'un tournoi : pour toute paire, il y a exactement un arc (u,v) ou (v,u)

on a donc $d^+(v) + d^-(v) = \#V - 1$

c) (⇒) Hyp : Tournoi transitif

Thèse : Sans cycle

Par l'absurde, on suppose avoir un cycle



donc $\exists\, u, v$ tels que $u \to v$ et $v \to u$

Vu la transitivité, on doit avoir l'arc (u,v) et aussi l'arc (v,u) présents.

Ceci contredit la déf. d'un tournoi.

(⇐) procédez encore une fois par l'absurde.

d) Soit r tel que $d^+(r)$ max.

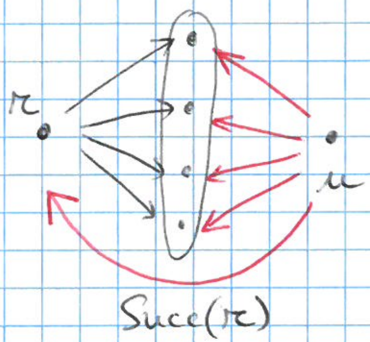
On doit montrer que tout sommet u est à distance ≤ 2 de r.

- Si $u \in \text{Succ}(r)$ (distance 1)

- Si $u \notin \text{Succ}(r)$

on doit montrer $\exists \underset{\text{Succ}(r)}{\underset{\rotatebox{90}{$\ni$}}{v}}$: $\overset{r}{\circ} \longrightarrow \overset{v}{\circ} \longrightarrow \overset{u}{\circ}$

par l'absurde, si un tel sommet v $\nexists$



Alors $\forall v \in \text{Succ}(r)$

$(u, v) \in E$

mais puisqu'on a un tournoi, on doit aussi avoir $(u, r) \in E$

donc $d^+(u) \geq d^+(r) + 1$ Absurde !

Ex 13

$$\underbrace{\text{Rad}(G)}_{\substack{= \\ \boxed{\min\limits_a} \max\limits_b d(a,b)}} \leq \underbrace{\text{diam}(G)}_{\substack{= \\ \boxed{\max\limits_a} \max\limits_b d(a,b)}}$$

Soit $x \in V$

$$\operatorname{diam} G = \max_a \max_b d(a,b)$$

$$\leq \max_a \max_b \big(d(a,x) + d(x,b) \big) \qquad \text{inég. triangulaire}$$

$$\leq \max_a d(a,x) + \max_b d(x,b) \qquad (*)$$

$$\operatorname{rad} G = \min_a \max_b d(a,b)$$

$$= \min \left\{ \max_b d(a,b) \mid a \in V \right\}$$

V est un ensemble fini, $\exists\, c$ qui réalise ce min.

$$= \max_b d(c,b)$$

Si on remplace x par c dans $(*)$, on a

$$\operatorname{diam} G \leq \underbrace{\max_a d(a,c)}_{\operatorname{rad} G} + \underbrace{\max_b d(c,b)}_{\operatorname{rad} G}$$

b) Pour K_n, $\operatorname{rad}(K_n) = \operatorname{diam}(K_n) = 1$

pour un cycle à n sommets, on a aussi

$$\operatorname{rad}(K_n) = \operatorname{diam}(K_n) = \frac{n}{2}$$

↙

pour n pair

c) $n = 1$

Sommet isolé

$\mathrm{rad}(G) = \mathrm{diam}(G) = 0$

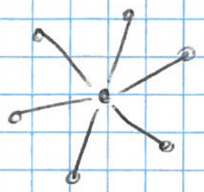
et $2.0 = 0$

$n = 2$

$\mathrm{diam}(G) = \mathrm{rad}(G) = 1$

$2.1 \neq 1$

$n \geq 3$



$\mathrm{diam}(K_{1,n-1}) = 2$

$\mathrm{rad}(K_{1,n-1}) = 1$

ok.

Ex 14

$\{1, 2, 5, 6\}$

$\{13, 14\}$

$\{9\}$

$\{4\}$

$\{11\}$

$\{3, 7, 8, 10, 12, 15, 16\}$

TP 2 Ex Suppl. 12

a) Par l'absurde, supposons G connexe.

Par hyp, G n'est pas un arbre donc il contient un cycle.

Si G est connexe, il contient un sous-arbre couvrant avec les n sommets et $n-1$ arêtes

mais s'il y a dans G un cycle, alors on a au moins 1 arête de plus $\Rightarrow$ n arêtes

Absurde !

b) c)

On sait que G a au moins 2 comp. connexes

Soient $C_1, C_2, \dots, C_k$ les $k \geq 2$ composantes.

Si chaque composante est un arbre, alors

si C_i a n_i sommets, il a $n_i - 1$ arêtes

alors au total $\underbrace{\sum_{i=1}^{k} n_i}_{n} - k$ arêtes

$\Rightarrow$ au moins une composante n'est pas un arbre

Si aucune composante n'est un arbre,

si C_i a n_i sommets, il y a $\geq n_i$ arêtes

donc au total $\geq \sum n_i = n$ arêtes

$\Rightarrow$ au moins une composante est un arbre

d) 2 composantes C_1 arbre n_1 sommets
$n_1 - 1$ arêtes

$n_1 + n_2 = n$ C_2 pas arbre n_2 sommets

donc C_2 a n_2 arêtes

C_2 est connexe donc contient un sous arbre couvrant avec $n_2 - 1$ arêtes

Or on a n_2 arêtes.

Cette "arête supplémentaire" crée 1 cycle.

Ex 14

utilisation formule d'Euler

Résumé $3 N_3 = f$ $a = 2f$

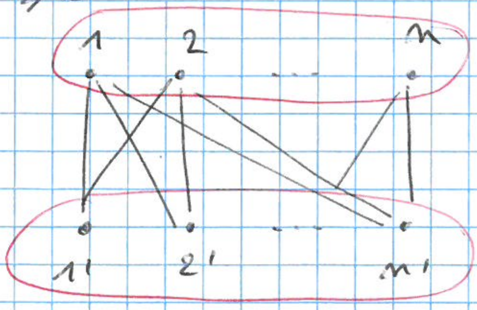
$4 N_4 = 2f$ $s - a + f = 2$

$5 N_5 = f$

... $f = 60$, $a = 120$, $N_3 = 20$, $N_4 = 30$, $N_5 = 12$.

$\boxed{\text{TP 3}}$ Ex Suppl. 7

Si $n = m \geq 2$

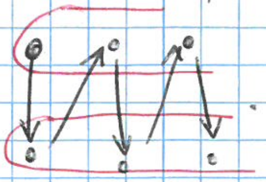


On a un circuit hamiltonien

$1, 1', 2, 2', \dots, n, n', 1$

Si $n \neq m$, un tel circuit n'existe pas.

Vu le caractère biparti, tout chemin passe alternativement dans les sommets d'une composante puis de l'autre. Si par ex. $n > m$



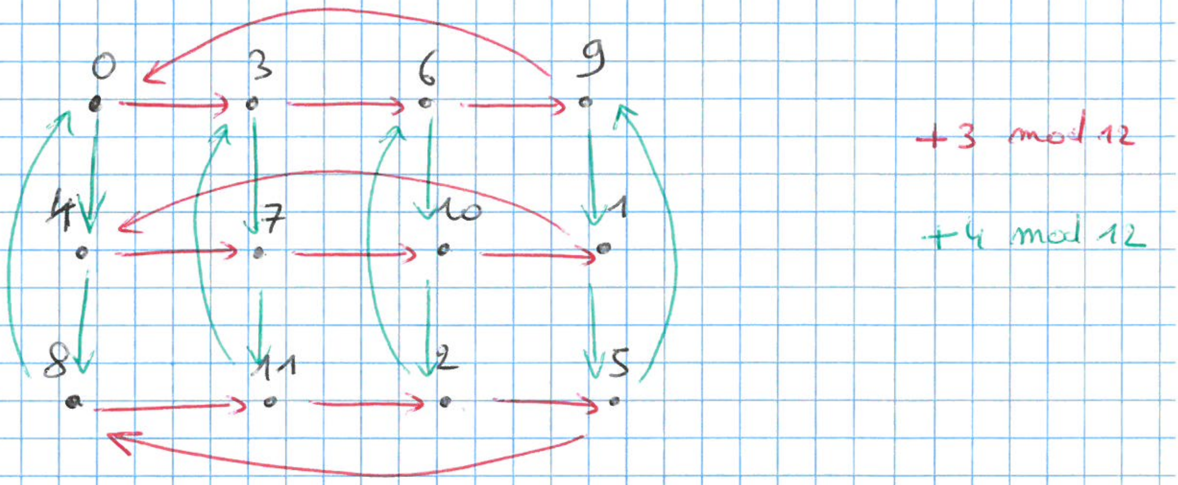
$1, 1', \dots, m, m', m+1, \bigcirc$

↓

on doit repasser par un sommet déjà visité.

On n'a jamais, le long d'un chemin, 2 sommets de la m̂ composante.

Ex 8

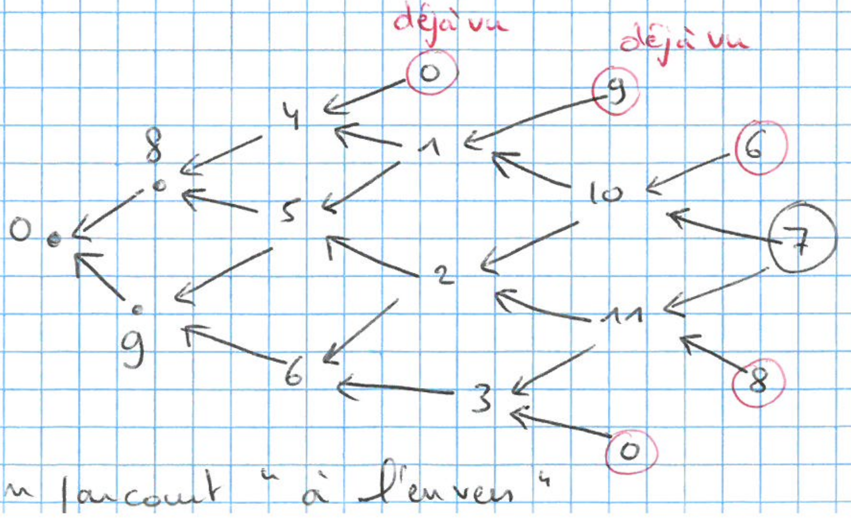


le graphe est fortement connexe, il suffit par ex. d'emprunter un circuit "rouge" et les circuits "verts" pour connecter n'importe quel couple de sommets.
(sommets fortement connectés)

b) $\forall v \quad d^+(v) = d^-(v) = 2$

donc eulérien (résultat théorique)

c)



V_7 est le seul sommet qui nécessite 5 coups.

On parcourt "à l'envers"

d) par l'absurde,

supposons avoir un circuit hamiltonien

On a une permutation ν des sommets

circuit hamiltonien : $$\begin{tikzcd} v_{\nu_0} \arrow[r] & v_{\nu_1} \arrow[r] & v_{\nu_2} \arrow[r] & \dots \arrow[r] & v_{\nu_{10}} \arrow[r] \arrow[llll, bend left] & v_{\nu_{11}} \end{tikzcd}$$

à chaque fois $\nu_{i+1} = \nu_i + 3 \mod 12$ ou $\nu_{i+1} = \nu_i + 4 \mod 12$ $\forall i \leq 10$

et $\nu_{11} + 3 = \nu_0 \mod 12$ ou $\nu_{11} + 4 = \nu_0 \mod 12$.

Supposons avoir k fois la relation "$+3$"
et $(12-k)$ ——— "$+4$".

On revient au départ avec k arcs rouges et $(12-k)$ arcs verts

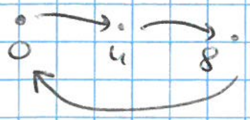
Puisqu'on a un circuit $\nu_0 = \nu_0 + 3k + (12-k)4 \mod 12$

et donc $k = 0 \mod 12$

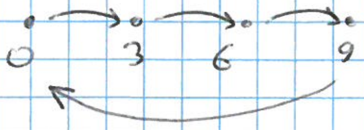
c.à.d $\underbrace{k=0}$ ou $\underbrace{k=12}$.

uniquement des $+4$

uniquement des $+3$



pas hamiltonien.



pas hamiltonien

ces 2 situations sont absurdes.

On n'a pas de circuit hamiltonien !

Ex 9 Exactement m̂ raisonnement que le précédent.

a) Vu la définition des arcs, il y a <u>au plus</u> 3 comp. f. connexes

on construit les circuits

$$\overset{+6}{\longleftarrow\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-}$$

$$\{0, \xrightarrow{+6} 6, 12, 18, 24, \xrightarrow{+15} 9, 15, 21, 27, \xrightarrow{+6} 3, \xrightarrow{+15} 18, \xrightarrow{+6} 24\}$$

$$\{1, 7, 13, 19, 25, 10, 16, 22, 28, 4, 19, 25\}$$

$$\{2, 8, 14, 20, 26, 11, 17, 23, 29, 5, 20, 26\}$$

il y a <u>au moins</u> 3 composantes car si $i \not\equiv j \mod 3$
il n'y a aucun chemin de v_i à v_j
(puisqu'on ne peut faire que +6 ou +15).

b) oui, idem ex. préc.

c) non, m̂ raisonnement ex préc.

on fait k fois "+6"
$(10-k)$ fois "+15"

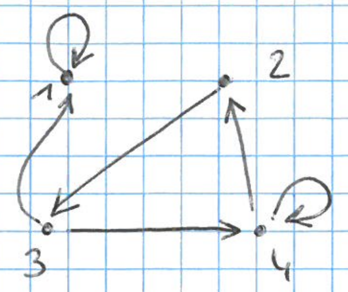
(on travaille dans la comp. H)

on obtient la m̂ discussion et le m̂ type de contradiction.

d) Vérifier que diam$(H) = d(v_0, v_9) = 5$.

m̂ construction que pour le point c de l'ex. précédent.

TP4   Ex. Suppl. 8

a) 

on a un circuit de lg 3

b) $\{1\}$, $\{2, 3, 4\}$

c) le graphe n'est pas f. connexe
donc M n'est pas irréductible (en particulier, pas primitive)

pour rendre le graphe f. connexe, il suffit d'ajouter l'arc $(1,2)$ ou $(1,3)$ ou $(1,4)$.

Vu la présence d'une boucle (en 1, ou en 4)
la période du graphe obtenu vaudra 1
donc le graphe sera primitif (ou sa matrice)

d) Si on se limite à la comp. f. connexe formée des sommets $\{2,3,4\}$, on applique à la matrice 3×3 correspondante M,
le thm. de Cayley-Hamilton : $\det(M-\lambda I) = \chi_M(\lambda)$
et $\chi_M(M) = 0$.

Donc on a une rel. lin. d'ordre 3
de la forme $M^{n+3} = a\,M^{n+2} + b\,M^{n+1} + c\,M^{n}$

il suffit de regarder les conditions initiales pour les suites demandées

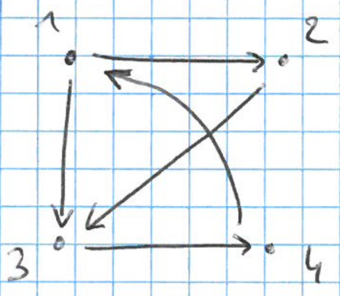
	$n=0$	$n=1$	$n=2$
$(M^n)_{3,2}$	0	0	1
$(M^n)_{4,3}$	0	0	1
$(M^n)_{2,4}$	0	0	1

m̂ cond. initiales donc m̂ suites.

On procède de m̂ façon le "bonus" mais avec une récurrence d'ordre 4.

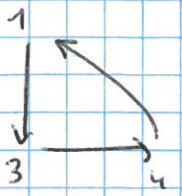
Ex 9

a)



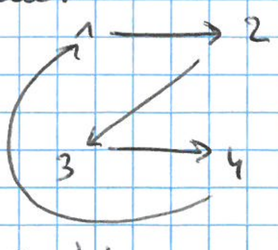
b) Tout d'abord le graphe est f. connexe (la matrice est donc au moins irréductible)

Partant de 1 on a le circuit



de long. 3

et le circuit



de long 4

le pgcd de 3 et 4 vaut donc la période de G vaut 1.

Pour rappel, dans un graphe f. connexe tous les sommets ont m̂ période
et la période d'un sommet est le pgcd des long. des cycles passant par ce sommet.

c) ∃ une matrice constante C telle que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{M^n}{\alpha^n} = C$$

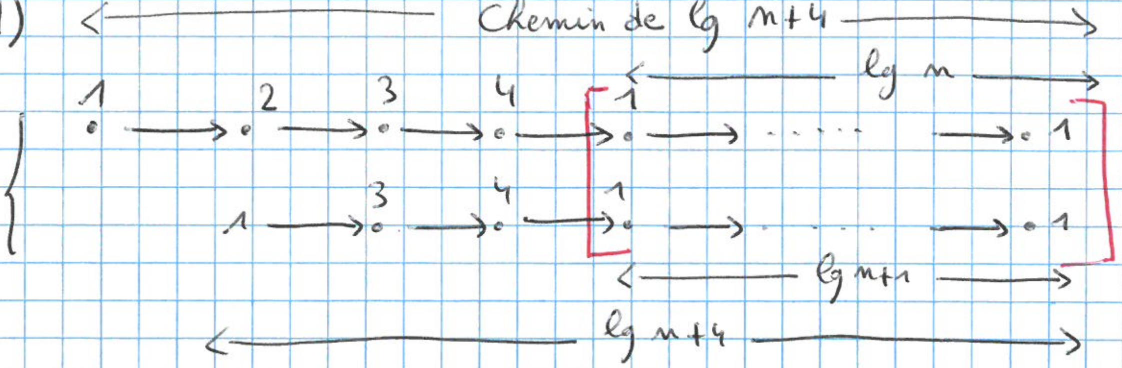
ou encore, $\forall i,j$

$$[M^n]_{i,j} = \alpha^n c_{i,j} + \underbrace{o(\alpha^n)}_{\text{terme} \to 0 \text{ si divisé par } \alpha^n \text{ et } n \to \infty.}$$

càd $\displaystyle \lim_{n \to \infty} \frac{[M^n]_{i,j}}{\alpha^n} = c_{i,j}$

d)

Vu le graphe



Tout chemin de lg n+4 démarre
soit par un circuit 1 → 2 → 3 → 4 → 1 suivi d'un chemin de lg n
soit par 1 → 3 → 4 → 1 suivi par un chemin de lg n+1

$\# \text{ chemins } 1 \to 1 \text{ de lg } n := c(n)$

$$c(16) = \underbrace{c(13)}_{c(10)+c(9)} + \underbrace{c(12)}_{c(9)+c(8)}$$

$$= \underbrace{c(10)}_{c(7)+c(6)} + 2\,\underbrace{c(9)}_{c(6)+c(5)} + \underbrace{c(8)}_{c(5)+c(4)}$$

$$= \underbrace{c(7)}_{\underbrace{c(4)}_{1}+\underbrace{c(3)}_{1}} + 3\,\underbrace{c(6)}_{\underbrace{c(3)}_{1}+\underbrace{c(2)}_{0}} + 3\,\underbrace{c(5)}_{\underbrace{c(2)}_{0}+\underbrace{c(1)}_{0}} + \underbrace{c(4)}_{1}$$

$$= 6$$

Quelques examens (théorie des graphes)

sur www.discmath.ulg.ac.be/notes2bm.html

- JAN 2015

  Ex 4 $\quad 4s = 2a \qquad s = 30$

  $s - a + f = 2 \qquad a = 60$

- JAN 2016

  Ex 2 Graphe de Pappus

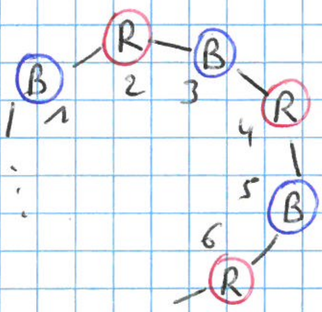
  a) le graphe est hamiltonien, on a le circuit

  il suffit de trouver un circuit passant une et une seule fois par chaque sommet.

  b) On a des sommets de degré impair, le graphe n'est pas eulérien

  c) On doit colorier les sommets pour que des sommets voisins aient des couleurs $\neq^{\text{tes}}$

Si on numérote les sommets de 1 à 18, on voit que des sommets de m̂ parité ne sont jamais voisins.



Alterner Rouge/Bleu convient

  d) Résultat théorique du cours :

  graphe 3-régulier $\Rightarrow$ 3 est valeur propre

  (vecteur propre $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$)

  le graphe est connexe

  donc les valeurs propres sont de $|.| \leqslant 3$.

- JAN 16

Ex 4

$T =$ # faces triangulaires

$C =$ # faces carrées

$f = T + C = 26$

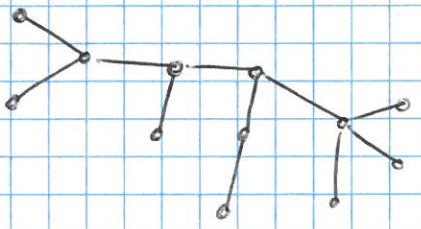
$s - a + f = 2$

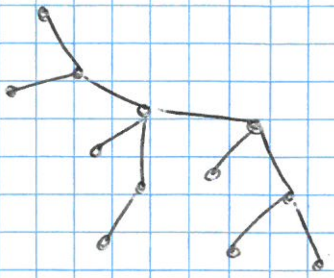
$s = 3\,T$ … $a = 48$

$3s = 4\,C$ $s = 24$

- Aout 16

Ex 3





il faut encore discuter sur le fait que ces 2 arbres ne sont pas isomorphes.

Ex 4

$N_3 =$ # sommets de deg 3

$N_5 =$ # ———— 5

$s - a + f = 2$

$s = N_3 + N_5$ … $N_5 = 12$

$f = 30$ $N_3 = 20$

$2a = 4f$ $s = 32$

$3N_3 + 5N_5 = 2a$ $a = 60$