TD 1 avril 2019 – Correctif
Algèbre linéaire

1. On considère les matrices
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Si possible, diagonaliser ces matrices.
Solution. Le polynôme caractéristique de A est donné par $\det(A-\lambda I) = (2-\lambda)^2(-3-\lambda)(1-\lambda)$. Les valeurs propres sont donc -3 et 1 de multiplicité algébrique 1, et 2 de multiplicité algébrique 2. Une base de l'espace propre E_2 est donnée par
$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$
Ainsi, $\dim E_2 = 2 = \mu_2$. Comme les autres valeurs propres sont simples, on peut déjà conclure que A est diagonalisable. Après étude des espaces propres E_{-3} et E_1, si on pose
$$S := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 6 & -12 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$
alors S diagonalise A: $S^{-1}AS = \operatorname{diag}(2, 2, -3, 1)$.
Le polynôme caractéristique de B est donné par $\det(B - \lambda I) = (1 - \lambda)^3$. Ainsi, 1 est la seule valeur propre, de multiplicité algébrique 3. Comme samultiplicité géométrique vaut 1, B n'est pas diagonalisable.

2. On considère la matrice suivante
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-\alpha & 0 \\ -1-\alpha & 2+\alpha & -1-\alpha & 1+\alpha \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 1+\alpha & -1-\alpha & 1+\alpha & -\alpha \end{pmatrix}$$
Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ la matrice C est-elle diagonalisable? Pour ces valeurs de α, diagonaliser C.
Solution. Le polynôme caractéristique de C est $\det(C-\lambda I) = (\alpha-\lambda)(1-\lambda)^3$. Si $\alpha = 1$, il y a une unique valeur propre de multplicité algébrique 4 et de multiplicité géométrique 3. Si $\alpha \neq 1$, alors 1 est valeur propre de multiplicité algébrique 3 et de multiplicité géométrique 2. Dans tous les cas, C n'est pas diagonalisable.

3. Soit A une matrice carrée de dimension n telle que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = c$. Démontrer que c est valeur propre de A.
Solution : Il suffit remarquer que le vecteur
$$\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$
est un vecteur propre de A de valeur propre 2.

4. Soit x un vecteur propre de valeur propre λ de la matrice A. Vérifier que $\alpha A + \beta I$ a x comme vecteur propre de valeur propre $\alpha\lambda + \beta$. En déduire que A est diagonalisable si et seulement si $\alpha A + \beta I$ l'est.
Solution : On a
$$(\alpha A + \beta I)x = \alpha Ax + \beta Ix = \alpha\lambda x + \beta x = (\alpha\lambda + \beta)x.$$
Dès lors, si A est diagonalisable, il existe une base de vecteurs propres de A et donc de $\alpha A + \beta I$ qui est donc diagonalisable.

D'un autre côté, si $\alpha A + \beta I$ est diagonalisable, il existe une matrice S inversible et une matrice Δ diagonale telles que
$$S^{-1}(\alpha A + \beta I)S = \Delta \Leftrightarrow S^{-1}AS = \frac{1}{\alpha}(\Delta - \beta I),$$
de sorte que A est diagonalisable.

5. Soient $A, B \in \mathbb{C}_n^n$. Montrer que AB et BA ont les mêmes valeurs propres.
Solution : Si λ est une valeur propre non-nulle de AB, il existe $x \neq 0$ tel que $ABx = \lambda x$. Dès lors, on a
$$BA(Bx) = B(ABx) = B\lambda x = \lambda Bx.$$
Ainsi, comme Bx est nécessairement non-nul, il est vecteur propre de BA de valeur propre λ.

Ensuite, on a 0 valeur propre de AB si et seulement si $\det(AB) = 0$ si et seulement si $\det(BA) = 0$ si et seulement si 0 est valeur propre de BA.

6. Soit $A = (C_1, \ldots, C_n) \in \mathbb{C}_n^n$ une matrice inversible.
   (a) Trouver une matrice S telle que $B = (C_2, \ldots, C_n, 0)$ puisse s'écrire $B = AS$.
   (b) Montrer que les matrices $M = BA^{-1}$ et $N = A^{-1}B$ sont de rang $n - 1$ et qu'elles possèdent 0 comme seule valeur propre.

Solution :

(a) On a
$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Soit λ une valeur propre de $A^{-1}B$ (et donc de BA^{-1} vu l'exercice précédent), il existe donc $x \neq 0$ tel que $A^{-1}Bx = \lambda x$. Or, $A^{-1}B = S$, il en découle donc que $Sx = \lambda x$. De cette dernière égalité, on peut conclure que si $\lambda \neq 0$, il vient $x = 0$, ce qui est absurde. Ainsi, λ est nécessairement nul.

7. Deux matrices $A, B \in \mathbb{C}_n^n$ sont dites *semblables* s'il existe une matrice inversible $M \in \mathbb{C}_n^n$ telle que $A = M^{-1}BM$. Soient

$$A = \begin{pmatrix} 29 & 38 & -18 \\ -11 & -14 & 7 \\ 20 & 27 & -12 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & -8 & 4 \\ 3 & -3 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que A et B ont même déterminant, même trace, mais ne sont pas semblables (calculer $(A - I)^2$ et $(B - I)^2$).
Solution : Il suffit de calculer $(A - I)^2$ et $(B - I)^2$ pour voir que l'un est nul et l'autre non. Dès lors, si A et B étaient semblables, il en découlerait que

$$\begin{aligned} M^{-1}(B - I)^2 M &= M^{-1}(B - I)MM^{-1}(B - I)M \\ &= (M^{-1}BM - I)(M^{-1}BM - I) \\ &= (A - I)(A - I) = (A - I)^2 \end{aligned}$$

et donc que $(A - I)^2$ et $(B - I)^2$ sont tous les deux nuls.