Correction de l'interrogation dispensatoire d'algèbre du 18 janvier 2006

1.c) Combien de permutations ν de X sont impaires <u>et</u> laissent 1 invariant, i.e., $\nu(1) = 1$? Justifier votre réponse et préciser éventuellement les cas particuliers.

Solution : Si $n = 2$, la seule permutation qui laisse 1 invariant est la permutation identité et celle-ci est paire. Par conséquent, aucune permutation ne répond à la question. Si $n > 2$, alors $(n-1)!/2$ permutations répondent à la question. Cela revient en effet à compter les permutations impaires de $\{2, \ldots, n\}$.

3) Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Pour chacune d'elles, justifier votre réponse.

a) Soient F_1, F_2, F_3 des sous-espaces vectoriels du $\mathbb{R}$-vectoriel $\mathbb{R}^4$ tels que

$$F_1 \cap F_2 = F_2 \cap F_3 = F_1 \cap F_3 = \{0\}.$$

Alors, ces trois sous-espaces sont en somme directe.

b) Le déterminant

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

étant nul, on en déduit que les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ sont linéairement dépendants sur $\mathbb{R}$.

Solution : La première assertion est fausse. Pour le montrer, il suffit d'exhiber un contre-exemple. Soit $(e_1, \ldots, e_4)$ une base de $\mathbb{R}^4$. Les sous-espaces

$$F_1 = \rangle e_1 \langle, \ F_2 = \rangle e_2 \langle, \ F_3 = \rangle e_1 + e_2 \langle$$

satisfont la propriété énoncée et pourtant ils ne sont pas en somme directe. En effet, le vecteur nul peut se décomposer en $\underbrace{e_1}_{\in F_1} + \underbrace{e_2}_{\in F_2} - \underbrace{(e_1 + e_2)}_{\in F_3}$.

La seconde assertion est également fausse. En effet, pour que $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ soient linéairement dépendants, il est nécessaire et suffisant que <u>tous</u> les mineurs d'ordre deux de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

soient nuls. L'énoncé ne fournit qu'un tel mineur. Par contre,

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \neq 0.$$

1) Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites numériques réelles. On munit E de deux opérations pour en faire un $\mathbb{R}$-vectoriel,

$$\forall \mathbf{X} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}},\, \forall \mathbf{Y} = (y_n)_{n\in\mathbb{N}},\ \mathbf{X} + \mathbf{Y} = (x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

et

$$\forall \mathbf{X} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}},\, \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda\mathbf{X} = (\lambda\, x_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

a) E est-il un espace vectoriel de dimension finie ? Justifier.

solution : Non. Le moyen le plus direct pour répondre à la question est de remarquer (cf. b)) que E contient des parties libres possédant un nombre arbitrairement grand d'éléments. Par conséquent, E ne peut pas être de dimension finie car sinon toute partie libre contiendrait un nombre d'éléments borné par une constante.

b) Soient $k \geq 1$ et la suite

$$\mathbf{X}_k = \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{k\times}, 0, 0, 0, \ldots.$$

Les suites $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n$, $n \geq 2$, sont-elles linéairement dépendantes ?

solution : Non. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, \mathbf{X}_i = \mathbf{0}$ (où $\mathbf{0}$ représente bien sûr la suite $(0)_{n\in\mathbb{N}}$). On obtient le système triangulaire

$$\lambda_k = 0,\ \lambda_{k-1} + \lambda_k = 0, \ldots,\ \lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 0$$

qui possède l'unique solution $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$. Les k suites sont donc linéairement indépendantes.

c) Soient α, β deux réels fixés et le sous-ensemble $F \subset E$ défini par

$$F = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall n \geq 2,\ x_n = \alpha\, x_{n-1} + \beta\, x_{n-2}\}.$$

Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

solution : La suite nulle appartient à F. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de F qui satisfont pour tout $n \geq 2$, $x_n = \alpha\, x_{n-1} + \beta\, x_{n-2}$ et $y_n = \alpha\, y_{n-1} + \beta\, y_{n-2}$, alors la suite $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait pour tout $n \geq 2$, $x_n + y_n = \alpha\,(x_{n-1} + y_{n-2}) + \beta\,(x_{n-2} + y_{n-2})$. Elle appartient donc à F. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \geq 2$, la suite $(\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait $\lambda x_n = \alpha\, \lambda x_{n-1} + \beta\, \lambda x_{n-2}$ et appartient donc à F.

d) Quelle est la dimension de F ? (Suggestion: quel est le nombre minimum d'éléments de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F nécessaires pour déterminer entièrement cette suite ?)

solution : Une suite de F est déterminée par ses deux premiers éléments x_0 et x_1. Ainsi, les suites $(\delta_{0,n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\delta_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base de F et $\dim F = 2$.

e) Soient α, β deux réels fixés et le sous-ensemble $G \subset E$ défini par

$$G = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall n \geq 2,\ x_n = \alpha\, x_{n-1} + \beta\, x_{n-2} + 1\}.$$

Cet ensemble est-il un sous-espace vectoriel de E ? Justifier.

solution : Non. La suite $\mathbf{0}$ n'appartient pas à G.

f) Déterminer une suite $\mathbf{Y}$ de E qui satisfait à

$$\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall n \geq 1, x_n = 2\, x_{n-1}\} = \rangle \mathbf{Y} \langle.$$

solution : Si pour tout $n \geq 1$, $x_n = 2\, x_{n-1}$, alors cette suite satisfait pour tout $n \geq 0$, $x_n = 2^n x_0$. Ainsi, $\mathbf{Y} = 1, 2, 4, 8, 16, \ldots, 2^n, \ldots$ convient.

g) Montrer que l'ensemble des suites convergentes de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est un sous-espace vectoriel de E. (On suppose connue la théorie des suites convergentes vue en analyse.)

solution : Il suffit de remarquer que la suite constante $\mathbf{0}$ est convergente, que la somme de deux suites convergentes est convergente et qu'il en est de même pour le produit par un réel d'une suite convergente.

2) Soient A et B deux matrices de $\mathbb{C}_n^n$ pour lesquelles il existe un entier $k \geq 2$ tel que

$$B^k = 0, \quad B^{k-1} \neq 0 \quad \text{et} \quad A = I - B.$$

a) Démontrer que B n'est pas inversible.
b) Démontrer que A est inversible et que $A^{-1} = I + B + \cdots + B^{k-1}$
c) Le système $Ax = b$ où $x, b \in \mathbb{C}^n$ est-il de Cramer ? Si oui, en donner explicitement la solution.

solution : Si B était inversible, $B^k = 0$ le serait également ce qui est impossible. Pour montrer que A est inversible, il suffit d'en trouver un inverse. La matrice $I + B + \cdots + B^{k-1}$ convient car

$$(\underbrace{I - B}_{A}).(I+B+\cdots+B^{k-1}) = I+B+\cdots+B^{k-1}-B-\cdots-B^{k-1}-\underbrace{B^k}_{0} = I.$$

Puisque A est inversible, le système $Ax = b$ est de Cramer et sa solution unique est donnée par

$$x = A^{-1}b = (I + B + \cdots + B^{k-1})b.$$

3) Soit A une matrice carrée complexe de dimension $2m+1$, $m \in \mathbb{N}$. Démontrer que si A est anti-symétrique, i.e., $\widetilde{A} = -A$, alors $\det(A) = 0$.

solution : On sait que $\det(\widetilde{A}) = \det(A)$. Donc ici, $\det(-A) = \det(A)$. Le déterminant étant linéaire sur les colonnes de A, on en déduit que $\det(-A) = (-1)^{2m+1}\det(A)$. De là, $\det(A) = -\det(A)$ et donc, $\det(A) = 0$.