Université de Liège

Année académique 2018 – 2019

Calcul matriciel

Béatrice Lahaye
Beatrice.Lahaye@uliege.be

Adeline Massuir
A.Massuir@uliege.be

1 Signe sommatoire et symbole de Kronecker

Exercices

1. Développer explicitement et calculer les expressions suivantes :

$$\sum_{i=1}^{3} i^2, \quad \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} ij, \quad \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{i} ij,$$

$$\sum_{0\leq i\leq j\leq 4} (j-i), \quad \sum_{\heartsuit\in\{2,3,5,7\}} (\heartsuit+1), \quad \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{10} \delta_{i,j}.$$

2. Montrer les égalités suivantes :
   a) $\sum_{i=1}^{n} ax_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i$;
   b) $\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i$;
   c) $\sum_{i=1}^{n} 1 = n$;
   d) $\sum_{i=1}^{n} a = na$.

3. **(Admission Ingénieurs 2000)**
   a) Démontrer les formules suivantes :
      (i) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
      (ii) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
   b) En déduire la valeur de la somme $\sum_{i=0}^{m}(m-i)(n-i)$.

4. Exprimer en fonction de x et de n la somme $\sum_{k=0}^{n} x^k$.

5. Exprimer en fonction de n la somme $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

6. Montrer

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{i,j} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} x_{i,j}.$$

7. Exprimer en fonction de n la somme $\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j} \frac{1}{n-k+1}$.

8. Calculer
   a) $\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j}(j-k)\,\delta_{j,k+1}$;
   b) $\sum_{k=1}^{n} kq^{k-1}$.

Préparation

1. Calculer $\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{j} \delta_{j,k}$.
2. **(Admission Ingénieurs 2000)** Démontrer la formule

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 .$$

2 Matrices

1. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, on a
$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Soit $a \in \mathbb{C}$. Calculer les différentes puissances de la matrice
$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

3. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ avec } M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Déterminer les valeurs des paramètres réels α et β pour lesquels les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 2 \end{pmatrix}$ commutent.

5. Soient les matrices $A = (\delta_{n-i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ et $B = (\delta_{i+1,j})_{1\leq i,j\leq n}$. Calculer AB.
(Proposé) Calculer BA.

6. Soit la matrice $A \in \mathbb{C}_n^n$ définie par $A = (\frac{1}{n})_{1\leq i,j\leq n}$. Calculer A^2.

7. Soit la matrice $A \in \mathbb{C}_n^n$ définie par $A = (\delta_{n-i,j})_{1\leq i,j\leq n}$. Calculer les puissances successives de A (*Suggestion* : séparer les exposants pairs et les exposants impairs).

8. **(Proposé)** Soit la matrice $A \in \mathbb{C}_n^n$ définie par $A = (\delta_{i+1,j})_{1\leq i,j\leq n}$.
   a) Calculer les puissances successives de A.
   b) On définit l'*indice de nilpotence* d'une matrice $M \in \mathbb{C}_n^n$ comme étant le plus petit naturel m tel que $M^m = 0$. Déterminer l'indice de nilpotence de la matrice A.

9. Déterminer la forme générale des matrices qui commutent avec la matrice $A \in \mathbb{C}_n^n$ définie par $A = (\delta_{n+1-i,j})_{1\leq i,j\leq n}$.

10. Trouver les vecteurs $x \in \mathbb{R}^3$ tels que
$$Ax = b \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

11. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$. On définit les ensembles
$$F = \{Y \in \mathbb{R}_2^2 : AY = 0\}, \quad G = \{Y \in \mathbb{R}_2^2 : YA = 0\}, \quad H = \{Y \in \mathbb{R}_2^2 : AY = YA\}.$$
   a) Déterminer les ensembles F, G et H.

b) Comparer les ensembles F, G et H.

12. Pour tout nombre réel θ, on pose

$$M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Montrer que, pour tout entier naturel n et pour tout réel θ, on a $(M(\theta))^n = M(n\theta)$.

13. **(Proposé)** Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_2^2.$$

Calculer les puissances successives de la matrice A.

3 Matrices et permutations

1. Soit $A \in \mathbb{C}_n^n$. Notons $\mathbf{0}$ la matrice nulle de $\mathbb{C}_n^n$. Calculer les puissances successives de la matrice
$$B = \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} & A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A & \mathbf{0} & A \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & A \end{pmatrix}.$$

2. Considérons les matrices de $\mathbb{C}_n^n$ suivantes
$$M = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_0 & a_1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-2} & b_{n-1} \\ 0 & b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_0 & b_1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_0 \end{pmatrix}.$$
Démontrer que M et N commutent.

3. Soit $a \in \mathbb{C}$. Déterminer la forme générale des matrices de $\mathbb{C}_4^4$ qui commutent avec
$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

4. Considérons la permutation
$$\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 4 & 7 & 2 & 6 & 1 & 8 & 9 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$
   (a) Décomposer μ en un produit de cycles disjoints.
   (b) Décomposer μ en un produit de transpositions (cycles de longueur 2).
   (c) En déduire la signature de la permutation (et sa parité).

5. Considérons la permutation
$$\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 9 & 1 & 3 & 2 & 11 & 12 & 10 & 4 & 13 & 8 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$
   (a) Décomposer μ en un produit de cycles disjoints.
   (b) Calculer la signature de μ et en déduire sa parité.

6. Soient les permutations $\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $\nu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer $\mu\nu$, $\nu\mu$, $\mu\mu$ et $\nu\nu$. Les permutations μ et ν commutent-elles ?
   (b) Quels sont les éléments appartenant Ã $\{\mu^n | n \in \mathbb{N}\}$ et $\{\nu^n | n \in \mathbb{N}\}$ respectivement ?
   (c) Quel est l'inverse de μ ?
   (d) Décomposer μ et ν en un produit de cycles disjoints.
   (e) Décomposer μ en un produit de transpositions.
   (f) Quelle est la signature de μ, de ν et de $\mu\nu$?

7. Soient $n \in \mathbb{N}$ et τ une transposition de $\mathcal{S}_n$. Montrer que $f : \mathcal{S}_n \to \mathcal{S}_n : \mu \mapsto \tau\mu$ et $g : \mathcal{S}_n \to \mathcal{S}_n : \mu \mapsto \mu\tau$ sont des bijections de $\mathcal{S}_n$ dans lui-même.

8. **(Proposé)** Soit $n \geq 3$. Toute permutation de S_n est un produit de cycles de longueur 3. Vrai ou faux. Justifier.

4 Déterminants, indépendance linéaire et rang d'une matrice

1. Calculer et factoriser les déterminants

$$D = \begin{vmatrix} a & 3b & 0 & 0 \\ b & a & 2b & 0 \\ 0 & 2b & a & b \\ 0 & 0 & 3b & a \end{vmatrix} \text{ et } E = \begin{vmatrix} x & -y & -x & y \\ y & x & -y & x \\ z & -u & z & -u \\ u & z & u & z \end{vmatrix}.$$

2. Démontrer que, $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$,

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & -2 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & n-1 \\ 0 & \cdots & 0 & -(n-1) & 1 \end{vmatrix} = n!.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}_0$. Calculer le déterminant $D_n(x, y)$ de la matrice

$$M_n(x,y) = \begin{pmatrix} x & y & \cdots & y \\ y & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & y \\ y & \cdots & y & x \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n_n.$$

4. Démontrer la formule

$$\forall n \in \mathbb{N}_0,\ E_n(\lambda, a, b) = \begin{vmatrix} \lambda & a & \cdots & a \\ b & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \cdots & b & \lambda \end{vmatrix} = \begin{cases} \frac{a(\lambda-b)^n - b(\lambda-a)^n}{a-b} & \text{si} \quad a \neq b, \\ (\lambda - a)^{n-1}(\lambda + (n-1)a) & \text{si} \quad a = b. \end{cases}$$

5. Soit $z \in \mathbb{C}$. Calculer et factoriser le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} -7iz^2 - z & 2 & 1 \\ 1 & i & 0 \\ 4z^2 - z & -7/4 & -1 \end{vmatrix}.$$

6. (a) Dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix},$$

sont-ils linéairement indépendants ?

(b) Même question pour les vecteurs

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix},\ b_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

7. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ 2 \end{pmatrix}, \; x_2 = \begin{pmatrix} m \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ 3 \end{pmatrix},$$

où m est un paramètre réel. Pour quelle(s) valeur(s) de m, ces vecteurs sont-ils linéairement indépendants?

8. Soient $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^3$ trois vecteurs linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$. Posons

$$\begin{aligned} v_1 &= a_1 + a_2 + a_3, \\ v_2 &= a_1 - a_2 + a_3, \\ v_3 &= a_1 + a_2 - a_3. \end{aligned}$$

Les vecteurs $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ sont-ils linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$?

9. Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -4 & 8 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -2 & 3 & -13 \\ 3 & -3 & 15 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -5 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

10. Discuter, en fonction du paramètre complexe m, le rang de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ m & 1 & -1 & -1 \\ 1 & m & 1 & 0 \\ 1 & -1 & m & 2 \end{pmatrix}.$$

11. Calculer le rang des matrices

(a) $M = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & \alpha & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & 2 \\ 3 & \lambda & 2 & 2 \\ \lambda & 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

12. Considérons la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & b \\ a & c & d \end{pmatrix}.$$

Discuter la valeur du rang de la matrice M en fonction des paramètres réels a, b, c et d.

5 Inverses de matrices

1. Si possible, inverser la matrice
$$M = \begin{pmatrix} i & -i & 1+i \\ i & i & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Soient A, B, C, D des matrices avec A et D carrées et inversibles. Démontrer que les matrices
$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$
sont inversibles et calculer leur inverse.

3. Si possible, calculer l'inverse de
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Considérons la matrice complexe
$$M = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & & \vdots \\ & & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_1 & \cdots & a_{k-1} & a_k & \cdots & \cdots & a_n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & & \\ \vdots & & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & & & 1 \end{pmatrix}.$$
À quelles conditions la matrice M est-elle inversible ? Que vaut alors son inverse ?

5. **(Janvier 2006)** Soit A une matrice de $\mathbb{C}^n_n$ pour laquelle il existe un entier $k \geq 2$ tel que
$$A^k = 0 \quad \text{et} \quad A^{k-1} \neq 0.$$
Posons $B = I - A$ où $I \in \mathbb{C}^n_n$ est la matrice identité de dimension n. Démontrer
   (a) que A n'est pas inversible;
   (b) que B est inversible et que $B^{-1} = \sum_{\ell=0}^{k-1} A^\ell$.

6. **(Janvier 2008)** Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On considère la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & \overline{\alpha} & \overline{\alpha}^2 \\ \alpha & 1 & \overline{\alpha} \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$
Déterminer les valeurs du paramètre α pour lesquelles la matrice M est inversible et, dans ce cas, donnez son inverse.

7. Si A, B, C, D sont des matrices de $\mathbb{C}_n^n$ et si I est la matrice identité de $\mathbb{C}_n^n$, calculer

$$\begin{vmatrix} 0 & I & D \\ I & A & 0 \\ C & 0 & B \end{vmatrix}.$$

8. Si A, B, C, S sont des matrices de $\mathbb{C}_n^n$ et si I est la matrice identité de $\mathbb{C}_n^n$, à quelles conditions les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Calculer les inverses de ces matrices.

$$M = \begin{pmatrix} I & -I \\ S & S \end{pmatrix} \; ; N = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ A & B & C \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}.$$

9. En utilisant les formules de Frobenius-Schur, calculer

$$D = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & b \\ -b & 0 & 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & -b & 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & -b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}.$$

6 Espaces vectoriels (1)

Rappels

Définition [II.2.1, p. 34, version 2009-2010] Un *groupe* est un ensemble G muni d'une opération binaire interne et partout définie

$$\circ : G \times G \to G$$

qui jouit des propriétés suivantes :

(1) *associativité*, $\forall a, b, c \in G : (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$;

(2) *existence d'un neutre*, $\exists e \in G, \forall a \in G : a \circ e = e \circ a = a$ (ce neutre est unique);

(3) *existence d'un inverse*, $\forall a \in G, \exists b \in G : a \circ b = b \circ a = e$ (cet inverse est unique).

Si le groupe G possède la propriété supplémentaire suivante

(4) *commutativité*, $\forall a, b \in G : a \circ b = b \circ a$,

on dit que G est un *groupe commutatif* ou *groupe abélien.*

Définition [I.2.1, p. 3, version 2009-2010] Un *champ* est un ensemble $\mathbb{K}$ muni d'une application binaire interne et partout définie

$$+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$$

et d'une application binaire interne et partout définie

$$. : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$$

qui jouissent des propriétés suivantes :

(1) $(\mathbb{K}, +)$ est un groupe commutatif (on parlera d'opposés pour les inverses dans ce groupe);

(2) l'opération . est associative;

(3) il existe un neutre unique pour l'opération .;

(4) l'opération . est distributive par rapport à l'opération $+$, ce qui signifie que, $\forall a, b, c \in \mathbb{K}$, on a

$$(a + b).c = a.b + b.c \quad \text{et} \quad a.(b + c) = a.b + a.c;$$

(5) $\mathbb{K} \neq \{0\}$ et tout élément non nul possède un inverse pour l'opération .;

(6) l'opération . est commutative.

Si la dernière propriété n'est pas vérifiée, on dit que $\mathbb{K}$ est un *corps.*

Définition [VII.1.1, p. 121, version 2009-2010] Soit $\mathbb{K}$ un champ dont le neutre pour l'addition est 0 et le neutre pour la multiplication est 1. Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés *scalaires.* Un *espace vectoriel* sur $\mathbb{K}$ ou $\mathbb{K}$-*vectoriel* est un ensemble E muni d'une opération binaire interne

$$+ : E \times E \to E$$

et d'une opération interne

$$. : \mathbb{K} \times E \to E$$

qui jouissent des propriétés suivantes :

(1) $(E, +)$ est un groupe commutatif;

(2) pour tous $x, y \in E$ et tous scalaires $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

   (2.1) $\lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x$, i.e. l'opération . est associative par rapport aux scalaires;
   (2.2) $1.x = x$, i.e. il existe un neutre pour l'opération .;
   (2.3) $(\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x$, i.e. l'opération . est distributive par rapport aux scalaires;
   (2.4) $\lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$, i.e. l'opération . est distributive par rapport aux vecteurs.

Exercices

1. On considère un espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ sur un corps $\mathbb{K}$ et un vecteur $a \in E$. Démontrer que les opérations
$$\oplus : E \times E \to E : (x, y) \mapsto x \oplus y = x + y - a$$
et
$$\odot : \mathbb{K} \times E \to E : (\lambda, x) \mapsto \lambda \odot x = \lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot a$$
définissent sur E une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

2. Déterminer si les polynômes P, Q, R sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}[X]$ dans les cas suivants :
   (a) $P(X) = X^3 - 3X^2 + 3X + 1$, $Q(X) = X^3 - X^2 + 8X + 2$, $R(X) = 2X^3 - 4X^2 + 9X + 5$.
   (b) $P(X) = X^3 + 4X^2 - 2X + 3$, $Q(X) = X^3 + 6X^2 - X + 4$, $R(X) = 3X^3 + 8X^2 - 8X + 7$.

3. On considère $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ comme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
   (a) À quelle(s) condition(s) sur $z \in \mathbb{C}$ les éléments 1 et z sont-ils linéairement dépendants sur $\mathbb{R}$?
   (b) À quelle(s) condition(s) sur $z \in \mathbb{C}_0$ les éléments $\frac{1}{z}$ et 1 sont-ils linéairement dépendants sur $\mathbb{R}$?
   (c) Démontrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, les éléments $1, z$ et z^2 sont toujours linéairement dépendants sur $\mathbb{R}$.

4. Considérons le $\mathbb{C}$-vectoriel $E_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^4$.
   (a) Dans $E_{\mathbb{C}}$, les vecteurs
$$v_1 = \begin{pmatrix} 6 - 9i \\ 2 - 2i \\ 2 \\ -3i \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 + 2i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2i \\ 1 - i \\ 0 \end{pmatrix}$$
   sont-ils linéairement indépendants ?
   (b) Montrer que $E_{\mathbb{C}}$ peut être considéré comme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
   (c) Considérons le $\mathbb{R}$-vectoriel $E_{\mathbb{R}} = \mathbb{C}^4$. Les vecteurs v_1, v_2, v_3 sont-ils linéairement indépendants dans $E_{\mathbb{R}}$?
   (d) Quelle est la dimension de $E_{\mathbb{R}}$?
   (e) Quelle est la dimension de $E_{\mathbb{C}}$?

5. **(Proposé)** Considérons le $\mathbb{C}$-vectoriel $E_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^3$.

   (a) Dans $E_{\mathbb{C}}$, les vecteurs
   $$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ i \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3i \\ -14 \\ 7i \end{pmatrix}$$
   sont-ils linéairement indépendants ?

   (b) Montrer que $E_{\mathbb{C}}$ peut être considéré comme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

   (c) Considérons le $\mathbb{R}$-vectoriel $E_{\mathbb{R}} = \mathbb{C}^3$. Les vecteurs v_1, v_2, v_3 sont-ils linéairement indépendants dans $E_{\mathbb{R}}$?

   (d) Quelle est la dimension de $E_{\mathbb{R}}$?

   (e) Quelle est la dimension de $E_{\mathbb{C}}$?

6. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base d'un espace vectoriel E sur le champ $\mathbb{K}$. On donne les vecteurs
   $$e'_1 = e_1 + e_2 + e_3, \quad e'_2 = -e_1 + e_2 + 2e_3, \quad e'_3 = e_3 - 2e_4, \quad e'_4 = e_1 - e_2 - e_3.$$

   (a) Démontrer que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$ est une base de E.

   (b) Exprimer la formule de changement de base permettant de passer de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ et la formule de changement de base permettant de passer de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$.

7. Considérons le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{P}_2$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 à coefficients dans $\mathbb{R}$, i.e. $\mathcal{P}_2 = \mathbb{R}[X]_{\leq 2}$. Définissons les polynômes
   $$P_1(X) = X, \quad P_2(X) = 2X + 1, \quad P_3(X) = X^2 + 2X + 2.$$

   (a) Démontrer que les polynômes P_1, P_2, P_3 forment une base de $\mathcal{P}_2$.

   (b) Déterminer les composantes des polynômes Q_1, Q_2, Q_3 dans cette base si
   $$Q_1(X) = 1, \quad Q_2(X) = X, \quad Q_3(X) = X^2.$$

   (c) Écrire en général les formules de changement de base établissant le lien entre les composantes des polynômes de $\mathcal{P}_2$ dans ces deux bases.

8. Dans l'espace vectoriel des fonctions continues réelles $C^0(\mathbb{R})$, étudier l'indépendance linéaire des fonctions
   $$f : x \mapsto 1 \quad ; \quad g : x \mapsto \sin(x) \quad ; \quad h : x \mapsto \cos(x).$$

9. Dans l'espace vectoriel des fonctions continues réelles $C^0(\mathbb{R})$, étudier l'indépendance linéaire de
   $$f = m + \cos + \sin \quad ; \quad g = 1 + m\cos + \sin \quad ; \quad h = 1 + \cos + m\sin,$$
   où m est un paramètre réel. Dans le cas éventuel où les fonctions sont linéairement dépendantes, exprimer une relation linéaire entre elles.

10. Considérons le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{P}_3$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 à coefficients dans $\mathbb{R}$, i.e. $\mathcal{P}_3 = \mathbb{R}[X]_{\leq 3}$.

    (a) Démontrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, les polynômes 1, $X - a$, $(X - a)^2$ et $(X - a)^3$ forment une base de $\mathcal{P}_3$. Dans la suite, nous notons $\mathcal{B}$ cette base.

    (b) Rechercher les composantes d'un élément quelconque dans $\mathcal{B}$.

    (c) Écrire la formule de changement de base de la base $\mathcal{B}' = (1, X, X^2, X^3)$ de $\mathcal{P}_3$ à la base $\mathcal{B}$.

11. Soit $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_n)$ une base d'un espace vectoriel E sur le champ $\mathbb{K}$.

(a) Démontrer que les vecteurs

$$y_1 = x_1,\ y_2 = x_1 + x_2,\ \dots,\ y_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$$

forment une base $\mathcal{B}'$ de E.

(b) Établir la formule de changement de base permettant de passer de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

7 Espaces vectoriels (2)

Rappels

Proposition [VII.3.10, p. 129, version 2009-2010] Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et $U = (u_1, \ldots, u_n)$ une base de E. Définissons l'application

$$\Phi_U : E \to \mathbb{K}^n : x \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

qui, à un vecteur, associe ses composantes dans la base U. Alors cette application est une bijection telle que, pour tous $\lambda \in \mathbb{K}$, $x, y \in E$, on a $\Phi(\lambda x) = \lambda\Phi(x)$ et $\Phi(x + y) = \Phi(x) + \Phi(y)$.

On dit que les espaces E et $\mathbb{K}^n$ sont *isomorphes* et que l'application Φ est un *isomorphisme* (d'espaces vectoriels) entre ces deux espaces vectoriels. En particulier, des vecteurs $y_1, \ldots, y_k \in E$ sont linéairement dépendants (resp. indépendants) si, et seulement si, $\Phi(y_1), \ldots, \Phi(y_k) \in \mathbb{K}^n$ sont linéairement dépendants (resp. indépendants).

Définition [VII.5.1, p. 133, version 2009-2010] Soit E un espace vectoriel. Un sous-ensemble non vide $F \subset E$ est un *sous-espace vectoriel* de E s'il contient les combinaisons linéaires de ses éléments.

Proposition [VII.5.2, p. 133, version 2009-2010] Soit E un espace vectoriel sur le champ $\mathbb{K}$. Un sous-ensemble $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de E si, et seulement si, les assertions suivantes sont vérifiées:

i) $0 \in F$;

ii) si $x, y \in F$, alors $x + y \in F$;

iii) si $x \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\lambda x \in F$.

Proposition [VII.5.5, p. 134, version 2009-2010] Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors F est de dimension finie, inférieure ou égale à n. De plus, si $\dim(F) = n$, alors $F = E$.

Proposition [VII.5.7, p. 135, version 2009-2010] Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E et soit

$$H = \{f + g \mid f \in F, g \in G\}.$$

Alors H est un sous-espace vectoriel de E. Ce sous-espace H est appelé la somme de F et G et se note $F + G$.

Théorème [VII.5.15, p. 137, version 2009-2010] Si F et G sont des sous-espaces vectoriels de dimension finie de E, alors

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Définition [VII.5.16, p. 138, version 2009-2010] On dit que la somme $F + G$ de deux sous-espaces vectoriels F et G de E est *directe* si $F \cap G = \{0\}$. Auquel cas, on écrit $F \oplus G$.

Proposition [VII.5.25, p. 141, version 2009-2010] La somme de p sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_p$ de E est directe si et seulement si la somme de $F_2, \ldots, F_p$ est directe ainsi que la somme de F_1 et $F_2 \oplus \ldots \oplus F_p$. En particulier,

$$\dim(F_1 \oplus \ldots \oplus F_p) = \dim F_1 + \ldots + \dim F_p.$$

Exercices

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$. On définit les ensembles

$$F = \{X \in \mathbb{R}^2_2 : AX = 0\}, \quad G = \{X \in \mathbb{R}^2_2 : XA = 0\}, \quad H = \{X \in \mathbb{R}^2_2 : AX = XA\}.$$

   (a) Démontrer que F, G et H sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2_2$. Donner ensuite une base et la dimension de chaque sous-espace.

   (b) Décrire $F \cap G$, $F \cap H$ et $G \cap H$. Démontrer que ces trois ensembles sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2_2$. Donner ensuite une base et la dimension de chaque sous-espace.

2. Soient
$$L = \{p \in \mathbb{C}_{\leq 2}[z] : \forall z \in \mathbb{C}_0, z^2 p\left(\frac{1}{z}\right) = p(z)\}$$
et
$$M = \{p \in \mathbb{C}_{\leq 2}[z] : \forall z \in \mathbb{C}, p(z+1) = p(-z)\}$$
où $\mathbb{C}_{\leq 2}[z]$ est l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 2 à coefficients dans $\mathbb{C}$.

   (a) Montrer que L et M sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}_{\leq 2}[z]$.

   (b) Déterminer une base et la dimension de L, M, $L \cap M$ et $L + M$.

3. Soient
$$H_n = \{A \in \mathbb{C}^n_n : A^* = A\} \text{ et } U_n = \{A \in \mathbb{C}^n_n : A^* = -A\}.$$
Démontrer, si possible, que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^n_n$ et qu'on a $\mathbb{C}^n_n = H_n \oplus U_n$ lorsque $\mathbb{C}^n_n$ est vu

   (a) comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel;

   (b) comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

4. **(Proposé)** Considérons $\mathbb{C}^n_n$ comme un $\mathbb{C}$-vectoriel. Soient
$$S_n = \{A \in \mathbb{C}^n_n : \widetilde{A} = A\} \text{ et } A_n = \{A \in \mathbb{C}^n_n : \widetilde{A} = -A\}.$$
Démontrer que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^n_n$ et qu'on a $\mathbb{C}^n_n = S_n \oplus A_n$.

5. Soient A et B les parties de $\mathbb{R}^4$ définies par
$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 0 \\ x_3 = x_4^2 + 1 \end{cases} \right\}, \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$
Soient F et G les sous-espaces vectoriels engendrés respectivement par A et B. Démontrer que $F = G$.

6. Soit $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ considéré comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soient
$$P = \{f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}\} \text{ et } I = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}\}.$$
Démontrer que $E = P \oplus I$.

7. Considérons $\mathbb{C}_{\leq 3}[z]$, l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 à coefficients dans $\mathbb{C}$. Soient
$$A = \{p \in \mathbb{C}_{\leq 3}[z] : p(0) = p(1) = p(2)\},$$
$$B = \{D_z p : p \in A\} \text{ et } C = \{D_z^2 p : p \in A\}.$$

(a) Montrer que A, B et C sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}_{\leq 3}[z]$.

(b) Déterminer une base et la dimension de chaque sous-espace vectoriel.

(c) Démontrer que $\mathbb{C}_{\leq 3}[z] = A \oplus B \oplus C$.

8. **(Janvier 2013)** Soient E un $\mathbb{C}$-vectoriel de dimension $n \geq 3$ et $e_1, ..., e_n \in E$. On définit les vecteurs
$$t_j = e_j + e_{j+1} + e_{j+2} \quad \forall j \in \{1, ..., n-2\}$$
et $t_{n-1} = e_1 + e_{n-1} + e_n$, $t_n = e_1 + e_2 + e_n$.

   (a) Pour $n = 5$, montrer que $\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_n\}$ est une base de E si, et seulement si, $\mathcal{B}' = \{t_1, ..., t_n\}$ est une base de E.

   (b) Pour $n = 5$, donner la matrice de changement de base pour passer de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

9. **(Janvier 2008)** Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-vectoriel E tels que $E = F \oplus G$. Soit $(e_1, \ldots, e_k)$ une base de F. Montrer que, pour tout $g \in G$, $\rangle e_1 + g, \ldots, e_k + g \langle$ est un supplémentaire de G dans E.

10. **(Janvier 2014)** On se place dans $\mathbb{R}^4$ considéré comme $\mathbb{R}$-vectoriel. On considère l'ensemble
$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_1 + x_2 + x_3 = 0 \text{ et } x_1 - x_2 + x_4 = 0 \right\}$$
et le sous-espace vectoriel
$$G = \left\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\langle .$$

   (a) Vérifier que F est un sous-espace vectoriel et en donner une base.

   (b) F et G sont-ils en somme directe?

   (c) Trouver un supplémentaire de $F + G$.

   (d) Soit H le sous-espace vectoriel dont une base est donnée par
$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$
   Donner une base de $H \cap F$ et une base de $H + F$.

8 Systèmes linéaires

Rappels

Définition [VI.1.1, p. 101, version 2009-2010] Soient $p \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et $n \in \mathbb{N}$. Un *système d'équations linéaires* à n équations et p inconnues est un système de la forme

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\ \vdots & & & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{np}x_p & = & b_n \end{array}\right. .$$

Sous forme matricielle, ce système s'écrit $Ax = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}_p^n, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^p, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n.$$

Définition [VI.1.2, p. 101, version 2009-2010] Un système de la forme $Ax = b$ tel que $b = 0$ est dit *homogène*. Un système est *compatible* s'il possède au moins une solution. Sinon, il est dit *incompatible*. Par exemple, un système homogène est toujours compatible puisqu'il possède toujours la solution $x = 0$. Si un système possède une et une seule solution, il est dit *déterminé*. S'il possède plus d'une solution, il est dit *indéterminé*. Enfin, deux systèmes sont *équivalents* s'ils possèdent les mêmes solutions.

Proposition [VI.3.3, p. 104, version 2009-2010] Soient $A \in \mathbb{K}_p^n$ et $b \in \mathbb{K}^n$. Le système $(S)Ax = b$ est compatible si, et seulement si, le rang de A est égal au rang de $(A|b)$.

Corollaire [VI.3.6, p. 105, version 2009-2010] Si le système $(S)Ax = b$ est compatible, il est équivalent à tout système (S') obtenu en ne considérant que les lignes de la matrice A qui sont linéairement indépendantes et en nombre égal au rang de A.

Définition [VI.4.2, p. 107, version 2009-2010] Un système $(S)Ax = b$ est dit *de Cramer* si A est une matrice carrée inversible. Dans ce cas, $x = A^{-1}b$ et

$$x_j = \frac{1}{\det(A)} \det(C_1 \cdots \underbrace{b}_{j^{\text{ème}} \text{ colonne}} \cdots C_p).$$

En résumé, x_j est le quotient du déterminant de la matrice A du système où on a remplacé la $j^{\text{ème}}$ colonne par le second membre b, par le déterminant de A. Ces formules sont appelées les *formules de G. Cramer*.

Exercices

1. **(Proposé)** Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre réel m les matrices suivantes sont-elles inversibles ?

$$(a)\ A = \begin{pmatrix} m & 4 \\ 2 & 2m \end{pmatrix}, \quad (b)\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & 2 & m-1 \end{pmatrix}.$$

2. Résoudre les systèmes d'équations suivants :

$$(a)\left\{\begin{array}{lcl} 2x - 3y + 6z & = & 3 \\ 4x - y + z & = & 1 \\ 3x - 2y + 3z & = & 4 \end{array}\right. \quad (b)\left\{\begin{array}{lcl} 3y + z & = & 2 \\ 2x + 5y & = & 1 \\ -2x + y + 4z & = & 3 \end{array}\right.$$

$$(c) \left\{ \begin{array}{lcl} 5x+2y-3u-v & = & 11 \\ 5x-y+5z-u-2v & = & 2 \\ x-2y+4z+u-v & = & -5 \end{array} \right. \quad (d) \left\{ \begin{array}{lcl} -x+2y+z+3t & = & 6 \\ 7x+2y-13z+3t & = & -24 \\ 3x+y-5z-t & = & -12 \end{array} \right. .$$

3. Résoudre les systèmes d'équations suivants en discutant selon les valeurs des paramètres réels a, b, c et d :

$$(a) \left\{ \begin{array}{lcl} ax+by & = & a+b \\ bx+ay & = & a+b \\ x+y & = & c \end{array} \right. \quad (b) \left\{ \begin{array}{lcl} ax+by+z & = & 1 \\ x+aby+z & = & a \\ x+ay+z & = & c \end{array} \right. \quad (c) \left\{ \begin{array}{lcl} ax+by+cz & = & 1 \\ x+y+z & = & c \end{array} \right.$$

$$(d) \left\{ \begin{array}{lcl} ax+by+bz+at & = & 1 \\ bx+ay+az+bt & = & 1 \\ x+y+z+t & = & c \end{array} \right. \quad (e) \left\{ \begin{array}{lcl} x+y+z & = & b \\ ax+by+bz & = & a^2 \\ ax+cy+dz & = & ab \end{array} \right.$$

$$(f) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} ax+by+az & = & a \\ ax+ay+bz & = & b \\ bx+by+az & = & c \\ bx+ay+bz & = & d \end{array} \right. \quad (g) \left\{ \begin{array}{lcl} ay-bz & = & a^2+b^2 \\ -ax+az & = & 0 \\ bx-ay & = & -a^2-b^2 \\ x+z & = & c \end{array} \right. .$$