Introduction aux mathématiques discrètes (6)

Michel Rigo

http://www.discmath.ulg.ac.be/

Année 2018–2019

Suites linéaires récurrentes... (Rappels)

Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est dite linéaire récurrente homogène d'ordre k (ou de degré k) si elle satisfait, pour tout $n \geq 0$, une *relation de récurrence linéaire homogène* (à coefficients constants)

$$\boxed{x_{n+k} = a_{k-1}\, x_{n+k-1} + \cdots + a_0\, x_n} \qquad (1)$$

Les k premières valeurs $x_0, \ldots, x_{k-1}$ sont appelées les *conditions initiales*.
A l'équation (1), on associe le polynôme de $\mathbb{C}[X]$

$$\boxed{\chi(X) = X^k - a_{k-1}\, X^{k-1} - \cdots - a_1\, X - a_0.}$$

Ce polynôme de degré k est le polynôme caractéristique de la relation de récurrence

Si on dispose de la factorisation

$$\chi(X) = \prod_{j=1}^{r} (X - \alpha_j)^{m_j}$$

où les α_i sont les zéros de $\chi(X)$ de multiplicité m_i

Théorème

La *solution générale* de l'équation linéaire récurrente homogène (1) est donnée par la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général

$$\boxed{s_n = \sum_{i=1}^{r} P_i(n)\, \alpha_i^n}$$

où P_i est un polynôme de degré strictement inférieur à m_i.
Les coefficients des polynômes P_i sont déterminés par les conditions initiales.

- Cas non homogène
- Matrice compagnon
- Série génératrice

Cas non homogène

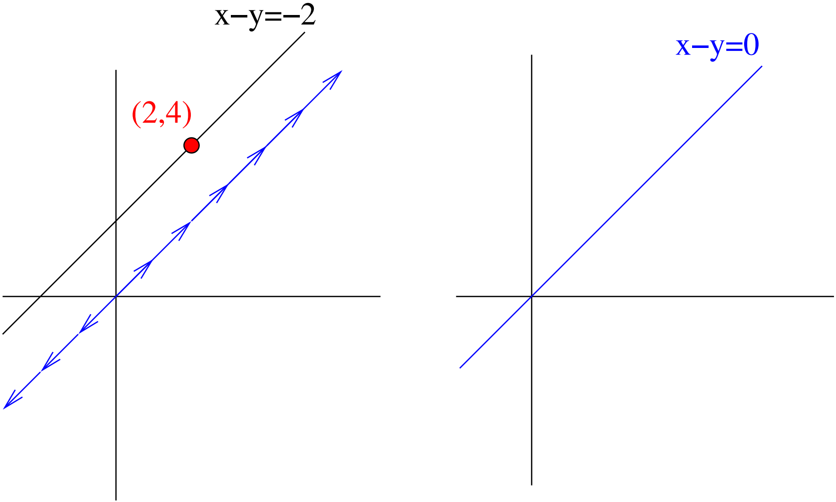
Comparable aux *systèmes d'équations linéaires* (et aux EDLCC)

Si on a un système $Ax = b$, les solutions de ce système s'obtiennent comme

- une solution particulière x_0 à laquelle
- on ajoute une solution arbitraire y du système homogène associé $Ay = 0$.

En effet,

$$A(x_0 + y) = Ax_0 + Ay = b + 0 = b.$$



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est dite linéaire récurrente (non homogène) si elle satisfait, pour tout $n \geq 0$,

$$x_{n+k} = a_{k-1}\, x_{n+k-1} + \cdots + a_0\, x_n + b_n \tag{2}$$

$$x_{n+k} - a_{k-1}\, x_{n+k-1} - \cdots - a_0\, x_n = b_n$$

avec $a_{k-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{C}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite donnée.

L'équation linéaire récurrente homogène associée est

$$x_{n+k} = a_{k-1}\, x_{n+k-1} + \cdots + a_0\, x_n$$

$$x_{n+k} - a_{k-1}\, x_{n+k-1} - \cdots - a_0\, x_n = 0.$$

On a le même type de résultat

Structure des solutions

Si on dispose d'une suite particulière $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant (2), alors les solutions de (2) sont exactement les suites de la forme

$$(z_n)_{n\in\mathbb{N}} + (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

où $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une solution quelconque de l'équation homogène associée.

Si

$$z_{n+2} - 5z_{n+1} + 3z_n = n\,2^n$$

$$x_{n+2} - 5x_{n+1} + 3x_n = 0$$

Alors

$$(z_{n+2} + x_{n+2}) - 5(z_{n+1} + x_{n+1}) + 3(z_n + x_n) = n\,2^n$$

Remarque

Tout le problème revient donc à trouver une *solution particulière*.

On va traiter le cas d'une *exponentielle-polynôme*.

Soit P un polynôme de degré $d \geq 0$ et $\lambda \neq 0$

$$x_{n+k} - a_{k-1}\, x_{n+k-1} - \cdots - a_0\, x_n = \lambda^n\, P(n) \tag{3}$$

Principe de superposition

Remarque : un seul terme suffit

Si on a une solution $(y_n)_{n\geq 0}$ de

$$x_{n+k} - a_{k-1}\,x_{n+k-1} - \cdots - a_0\,x_n = \lambda^n\,P(n)$$

et une solution $(z_n)_{n\geq 0}$ de

$$x_{n+k} - a_{k-1}\,x_{n+k-1} - \cdots - a_0\,x_n = \gamma^n\,Q(n)$$

alors $(y_n)_{n\geq 0} + (z_n)_{n\geq 0} = (y_n + z_n)_{n\geq 0}$ est solution de

$$x_{n+k} - a_{k-1}\,x_{n+k-1} - \cdots - a_0\,x_n = \lambda^n\,P(n) + \gamma^n\,Q(n).$$

Exemple : considérons l'équation non homogène (d'ordre 2)

$$x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 2^n$$

Dès lors,

$$x_{n+3} - x_{n+2} - x_{n+1} = 2^{n+1}$$

on peut donc soustraire

$$2x_{n+2} - 2x_{n+1} - 2x_n = 2.2^n$$

pour obtenir une équation homogène (d'ordre 3)

$$x_{n+3} - 3x_{n+2} + x_{n+1} + 2x_n = 0$$

et on sait comment procéder pour en trouver une solution !

Rechercher une solution particulière, second membre $\lambda^n P(n)$, ...
On peut montrer que

$$P(n), P(n+1), \ldots, P(n+d)$$

forment une base de l'espace des polynômes de degré au plus d.
Ainsi, il existe des coefficients $\beta_0, \ldots, \beta_d$ tels que

$$\lambda^{d+1} P(n+d+1) = \sum_{j=0}^{d} \beta_j \, \lambda^j \, P(n+j)$$

et donc, en multipliant les deux membres par λ^n

$$\boxed{\lambda^{n+d+1} P(n+d+1) = \sum_{j=0}^{d} \beta_j \, \lambda^{n+j} \, P(n+j) \quad .}$$

Exemple : exponentielle-polynôme avec $d = 1$

$$x_{n+2} - 5x_{n+1} + 3x_n = n\,2^n$$

où $\chi(X) = X^2 - 5X + 3$

$$(n+2)\,2^{n+2} = \underbrace{4}_{\beta_1}(n+1)\,2^{n+1}\underbrace{-4}_{\beta_0}\,n\,2^n.$$

$$\begin{array}{rcl|l|l} x_{n+4} - 5x_{n+3} + 3x_{n+2} & = & (n+2)\,2^{n+2} & \times 1 & \\ x_{n+3} - 5x_{n+2} + 3x_{n+1} & = & (n+1)\,2^{n+1} & \times(-4) & -\beta_1 \\ x_{n+2} - 5x_{n+1} + 3x_n & = & n\,2^n & \times 4 & -\beta_0 \end{array}$$

$$x_{n+4} - 9x_{n+3} + 27x_{n+2} - 32x_{n+1} + 12x_n = 0$$

récurrence homogène d'odre 4 dont le polynôme caractéristique est

$$\underbrace{(X^2 - 5X + 3)(X^2 - 4X + 4)}_{X^4 - 9X^3 + 27X^2 - 32X + 12} = \chi(X)\,(X^2 - \beta_1 X - \beta_0).$$

En toute généralité,

$$x_{n+k} - a_{k-1}\, x_{n+k-1} - \cdots - a_0\, x_n = \lambda^n\, P(n)$$

avec son polynôme caractéristique

$$\chi(X) = X^k - a_{k-1} X^{k-1} - \cdots - a_0,$$

alors une solution particulière de l'équation non homogène est solution de l'équation homogène (d'ordre $k+d+1$) ayant pour polynôme caractéristique

$$\chi(X) \left(X^{d+1} - \sum_{j=0}^{d} \beta_j\, X^j \right).$$

Matrice compagnon

Retour au cas homogène

$$x_{n+k} = a_{k-1}\, x_{n+k-1} + \cdots + a_0\, x_n$$

$$\begin{pmatrix} x_{n+k} \\ x_{n+k-1} \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{k-1} & a_{k-2} & \cdots & \cdots & a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n+k-1} \\ x_{n+k-2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Pour tout $n \geq 0$,

$$\begin{pmatrix} x_{n+k-1} \\ x_{n+k-2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathcal{M}^n \begin{pmatrix} x_{k-1} \\ x_{k-2} \\ \vdots \\ x_0 \end{pmatrix}.$$

On peut donc essayer de diagonaliser $\mathcal{M}$ pour obtenir une formule close pour x_n.

Remarque

Difficulté identique au thm. de structure, il faut les valeurs propres de $\mathcal{M}$ qui sont exactement les zéros de $\chi(X)$.

Si $\mathcal{M}$ est diagonalisable, il existe une matrice S telle que

$$S^{-1}\mathcal{M}S = \Delta = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$$

donc

$$\mathcal{M}^n = (S\Delta S^{-1})^n = S\Delta^n S^{-1} = S\mathrm{diag}(\lambda_1^n, \ldots, \lambda_k^n)S^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} x_{n+k-1} \\ x_{n+k-2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = S\mathrm{diag}(\lambda_1^n, \ldots, \lambda_k^n)S^{-1} \begin{pmatrix} x_{k-1} \\ x_{k-2} \\ \vdots \\ x_0 \end{pmatrix}.$$

Si pas diagonalisable... forme de Jordan...

Séries formelles

Outil de **manipulation**, on peut (en général) mettre la convergence de côté !

$$\mathbf{x} = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$$

$$s_{\mathbf{x}}(z) = 1 + z + 2z^2 + 3z^3 + 5z^4 + 8z^5 + 13z^6 + 21z^7 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \, z^n$$

Une série formelle est un moyen commode de disposer les éléments d'une suite. On la présente parfois comme "une corde à linge" sur laquelle on dispose les éléments de la suite d'intérêt.

« monde » des suites	« monde » des séries formelles
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$	$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n$
$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$	$\sum_{n=0}^{\infty} b_n\, z^n$
$\vdots$	$\vdots$
opérations sur les suites	opérations sur les séries formelles

Deux opérations sur les séries :

- la *somme* de deux séries formelles par

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\, z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)\, z^n$$

- le *produit de Cauchy* de deux séries formelles par

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n\right) . \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\, z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=n} a_i\, b_j\right)\, z^n.$$

Extension du produit de polynômes

$$\boxed{x_{n+k} = a_{k-1}\, x_{n+k-1} + \cdots + a_0\, x_n}$$

$$\chi(X) = X^k - a_{k-1}\, X^{k-1} - \cdots - a_0$$

Théorème

La suite $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est une suite linéaire récurrente satisfaisant l'équation (1) si et seulement si la série génératrice $s_{\mathbf{x}}(z)$ est une fraction rationnelle ayant pour dénominateur le polynôme réciproque

$$1 - a_{k-1} z - \cdots - a_0 z^k.$$

De plus, le numérateur de la fraction dépend uniquement des conditions initiales $x_0, \ldots, x_{k-1}$.

polynôme réciproque

$$X^k \chi(1/X) = 1 - a_{k-1} X - \cdots - a_0 X^k.$$

Soit la suite de Fibonacci satisfaisant la relation

$$\begin{cases} x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, \\ x_0 = 1, \; x_1 = 1. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \, z^n \quad &= \quad x_0 + x_1 \, z + \sum_{n=0}^{\infty} x_{n+2} \, z^{n+2} \\ &= \quad 1 + z + \sum_{n=0}^{\infty} (x_{n+1} + x_n) z^{n+2} \\ &= \quad 1 + z + z \sum_{n=0}^{\infty} x_{n+1} \, z^{n+1} + z^2 \sum_{n=0}^{\infty} x_n \, z^n \\ &= \quad 1 + z + z \left[s(z) - x_0 \right] + z^2 \, s(z). \end{aligned}$$

De là, on en tire que

$$s(z) = \frac{1}{1 - z - z^2}.$$

Soit la suite

relation de récurrence $\begin{cases} x_{n+2} = a x_{n+1} + b x_n, \\ x_0 = c, \; x_1 = d. \end{cases}$

$$\begin{aligned} s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n\, z^n \quad &= \quad x_0 + x_1\, z + \sum_{n=0}^{\infty} x_{n+2}\, z^{n+2} \\ &= \quad c + d\, z + \sum_{n=0}^{\infty} (a\, x_{n+1} + b\, x_n) z^{n+2} \\ &= \quad c + d\, z + a\, z \sum_{n=0}^{\infty} x_{n+1}\, z^{n+1} + b\, z^2 \sum_{n=0}^{\infty} x_n\, z^n \\ &= \quad c + d\, z + a\, z\, [s(z) - c] + b\, z^2\, s(z). \end{aligned}$$

De là, on en tire que

$$s(z) = \frac{c + (d - ac)z}{1 - az - bz^2} \quad \text{fraction rationnelle.}$$

relation de récurrence $\Rightarrow$ fraction rationnelle

Dans l'autre sens, si on a une fraction rationnelle,
alors on effectue une « longue division » :

$$
\begin{array}{rrrr|l}
1 & & & & 1 - z \\
\cline{5-5}
-(1 & -z) & & & 1 + z + z^2 + \cdots \\
\cline{1-2}
 & z & & & \\
 & -(z & -z^2) & & \\
\cline{2-3}
 & & z^2 & & \\
 & & -(z^2 & -z^3) & \\
\cline{3-4}
 & & & z^3 & \\
 & & & \ddots & \\
\end{array}
$$

3ième méthode pour trouver le terme général d'une suite :
Reprenons la série génératrice de Fibonacci,

$$s(z) = \frac{1}{1 - z - z^2}$$

- Développer en fractions simples
- Développer en série de puissances grâce au résultat ci-dessous.

Soit $t \in \mathbb{N}$. On a

$$\boxed{\frac{1}{(1 - \rho z)^{t+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{C}_{n+t}^{t} \, \rho^n \, z^n.}$$

C_{n+t}^{t} est un polynôme en n de degré t.

$$\frac{1}{1-z-z^2} = \frac{\sqrt{5}}{5\,(z+\Phi)} - \frac{\sqrt{5}}{5\,(z+\Phi')}$$

où $\Phi = (1+\sqrt{5})/2$ et $\Phi' = (1-\sqrt{5})/2$.

Donc, $\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$, $\Phi - 1 = -\Phi'$ et $-\Phi' = 1/\Phi$.

$$\frac{1}{z+\Phi} = \frac{1}{\Phi\,(1+\frac{1}{\Phi}z)} = \frac{-\Phi'}{1-\Phi' z} = -\Phi' \sum_{n=0}^{\infty} \Phi'^n\, z^n$$

$$\frac{1}{z+\Phi'} = \frac{1}{\Phi'(1+\frac{1}{\Phi'}z)} = \frac{-\Phi}{(1-\Phi z)} = -\sum_{n=0}^{\infty} \Phi^{n+1}\, z^n.$$

donc

$$\frac{1}{1-z-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x_n\, z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-\sqrt{5}\Phi'}{5}\Phi'^n + \frac{\sqrt{5}\Phi}{5}\Phi^n \right) z^n.$$

$n$ième terme de Fibonacci, $x_n = \dfrac{\sqrt{5}\Phi}{5}\Phi^n - \dfrac{\sqrt{5}\Phi'}{5}\Phi'^n$

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$$

Si on voulait la suite des sommes partielles ?

$$1, 2, 4, 7, 12, 20, 33, 54, 88, 163, 252, \ldots$$

A-t-on encore une relation de récurrence, si oui laquelle ?

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n\, z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right) z^n$$

donc ici,

$$\frac{1}{1-z} . \frac{1}{1-z-z^2} = \frac{1}{1-2z+z^3}$$

du polynôme réciproque, on tire

$$y_{n+3} = 2y_{n+2} - y_n$$

On introduit une *dérivée formelle* définie par

$$\mathrm{D}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n\right) = a_1 + 2a_2\, z + 3a_3\, z^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1}\, z^n.$$

Ainsi, $\mathrm{D}s_{\mathbf{a}}(z)$ est la série génératrice de la suite $((n+1)a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
En multipliant par z

$$z\mathrm{D}s_{\mathbf{a}}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, z^n$$

on a la série génératrice de la suite $(n\, a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$$

si on veut une relation pour $(n\, x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$0, 1, \underbrace{4}_{2\times 2}, \underbrace{9}_{3\times 3}, \underbrace{20}_{4\times 5}, \underbrace{40}_{5\times 8}, \underbrace{78}_{6\times 13}, \underbrace{147}_{7\times 21}, \underbrace{272}_{8\times 34}, \underbrace{495}_{9\times 55}, \ldots$$

$$z\mathrm{D}\frac{1}{1-z-z^2} = \frac{z+2z^2}{1-2z-z^2+2z^3+z^4}$$

on a donc la relation de récurrence

$$y_{n+4} = 2y_{n+3} + y_{n+2} - 2y_{n+1} - y_n$$

La suite des carrés vérifie-t-elle une récurrence linéaire ?
Considérons sa série génératrice

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n.$$

On sait que

$$1/(1-z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

On applique $z\mathrm{D}$ aux deux membres

$$z/(1-z)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} nz^n.$$

On applique encore $z\mathrm{D}$ aux deux membres

$$(z+z^2)/(1-z)^3 = (z+z^2)/(1-3z+3z^2-z^3) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n.$$

Ainsi, la suite $(n^2)_{n\geq 0} = 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, \ldots$ vérifie

$$y_{n+3} = 3y_{n+2} - 3y_{n+1} + y_n.$$

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$$

Si on veut uniquement les termes d'indice pair ?

$$1, 2, 5, 13, 34, 89, \ldots$$

Si on considère $s(z) + s(-z)$, simplification des termes d'exposant impair

$$s(z)+s(-z) = \frac{1}{1-z-z^2} + \frac{1}{1+z-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} x_n (-z)^n$$

$$\frac{-2+2z^2}{1-3z^2+z^4} = \sum_{n=0}^{\infty} 2\, x_{2n}\, z^{2n}$$

$$2, 0, 4, 0, 10, 0, 26, 0, 68, 0, 178, \ldots$$

On divise par 2 et on remplace z par $z^{1/2}$,

$$\frac{-1+z}{1-3z+z^2}$$

$$y_{n+2} = 3y_{n+1} - y_n$$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$	$s_{\mathbf{a}}(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}+(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $=(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}$	$s_{\mathbf{a}}(z)+s_{\mathbf{b}}(z)$
$\alpha(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $=(\alpha a_n)_{n\in\mathbb{N}}$	$\alpha s_{\mathbf{a}}(z)$
suite des sommes partielles $(\sum_{k=0}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}}$	$\frac{1}{1-z} s_{\mathbf{a}}(z)$
translation $0, a_0, a_1, a_2, \ldots$ $0, 0, a_0, a_1, a_2, \ldots$	$z s_{\mathbf{a}}(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+1}$ $z^2 s_{\mathbf{a}}(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+2}$
tronquer $a_1, a_2, a_3, \ldots$ $a_2, a_3, \ldots$	$(s_{\mathbf{a}}(z)-a_0)/z=\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} z^n$ $(s_{\mathbf{a}}(z)-a_0-a_1 z)/z^2=\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} z^n$
$(n\, a_n)_{n\in\mathbb{N}}$	$z\mathrm{D} s_{\mathbf{a}}(z)$
termes d'indice pair $a_0, 0, a_2, 0, a_4, 0, \ldots$	$(s_{\mathbf{a}}(z)+s_{\mathbf{a}}(-z))/2$
termes d'indice impair $0, a_1, 0, a_3, 0, a_5, 0, \ldots$	$(s_{\mathbf{a}}(z)-s_{\mathbf{a}}(-z))/2$

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$$

Si on veut uniquement les termes d'indice impair ?

$$1, 3, 8, 21, 55, 144, \ldots$$

on considère $s(z) - s(-z)$, simplification des termes d'exposant pair

$$s(z) - s(-z) = \frac{1}{1 - z - z^2} - \frac{1}{1 + z - z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} x_n (-z)^n$$

$$\frac{2z}{1 - 3z^2 + z^4} = \sum_{n=0}^{\infty} 2\, x_{2n+1}\, z^{2n+1}$$

$$0, 1, 0, 3, 0, 8, 0, 21, 0, 55, 0, 144, 0 \ldots$$

On divise par $2z$ (car on tronque) et on remplace z par $z^{1/2}$,

$$\frac{1}{1 - 3z + z^2}$$

$$y_{n+2} = 3y_{n+1} - y_n$$