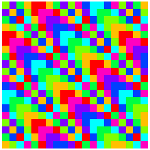
Introduction aux mathématiques discrètes (5)

Michel Rigo

http://www.discmath.ulg.ac.be/

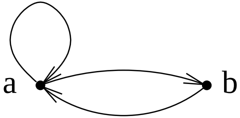
Année 2018–2019



Suites linéaires récurrentes...

- notion d'espace vectoriel
- base d'un espace vectoriel
- k vecteurs linéairement indépendants dans un espace de dimension k forment une base de l'espace
- k vecteurs colonnes $C_1, \dots, C_k \in \mathbb{C}^k$ sont linéairement indépendants SSI $\det(C_1 \cdots C_k) \neq 0$
- Thm. fondamental de l'algèbre : un polynôme de degré k possède k zéros (complexes) comptés avec leur multiplicité
- Thm. de Cayley–Hamilton

Combien de chemins de longueur n de a vers b ?



La semaine dernière. . .

Théorème

Soit $G = (V, E)$ un multi-graphe (orienté ou non) tel que $V = \{v_1, \dots, v_k\}$. Pour tous $i, j \in \{1, \dots, k\}$ et pour tout $n > 0$,

$$[A(G)^n]_{i,j}$$

est le nombre de chemins de longueur n joignant v_i à v_j.

$$\begin{pmatrix} 1 & {\color{red}0} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & {\color{red}1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & {\color{red}1} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & {\color{red}2} \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & {\color{red}3} \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & {\color{red}5} \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 13 & {\color{red}8} \\ 8 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 21 & {\color{red}13} \\ 13 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 34 & {\color{red}21} \\ 21 & 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 55 & {\color{red}34} \\ 34 & 21 \end{pmatrix}$$

- calcul itératif « plus direct » ?
- formule « close » $x_n = \cdots$?
- taux de croissance, comportement asymptotique ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

polynôme caractéristique

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \lambda - 1$$

Thm. de Cayley–Hamilton : *toute matrice annule son polynôme caractéristique*

$$A^2 - A - I = 0$$

En multipliant par A^n, $n \geq 0$, on trouve

$$A^{n+2} = A^{n+1} + A^n.$$

$$A^{n+2} = A^{n+1} + A^n$$

l'égalité matricielle a lieu pour chaque composante, donc

$$[A^{n+2}]_{1,2} = [A^{n+1}]_{1,2} + [A^n]_{1,2}, \quad \forall n \geq 0$$

et $[A^0]_{1,2} = 0$, $[A^1]_{1,2} = 1$.

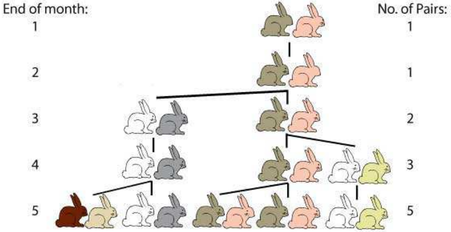
On a donc une suite $(x_n)_{n\geq 0}$

$$\begin{cases} x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, & \forall n \geq 0 \\ x_0 = 0, \quad x_1 = 1 \end{cases}$$

Remarque

On peut le faire pour n'importe quel graphe.

Suite de Fibonacci

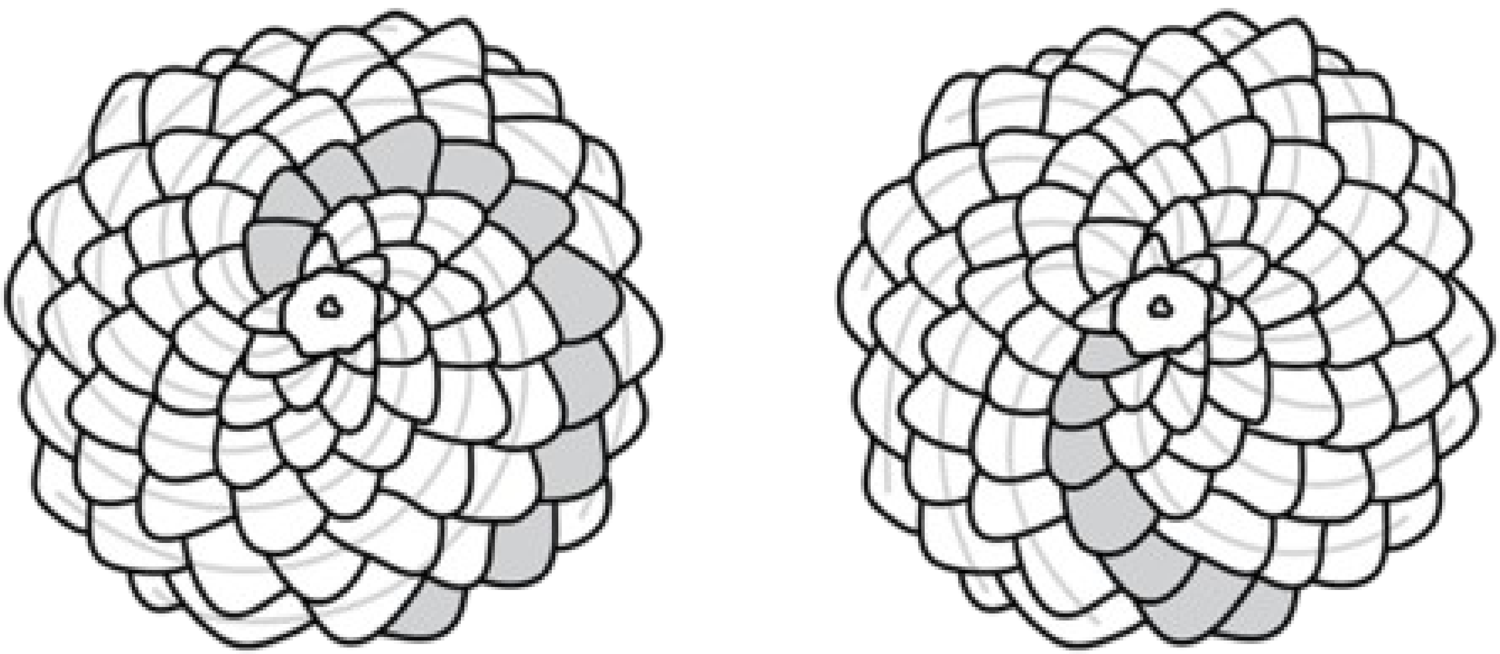


$$\begin{cases} x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, & \forall n \geq 0 \\ x_0 = 0, \quad x_1 = 1 \end{cases}$$

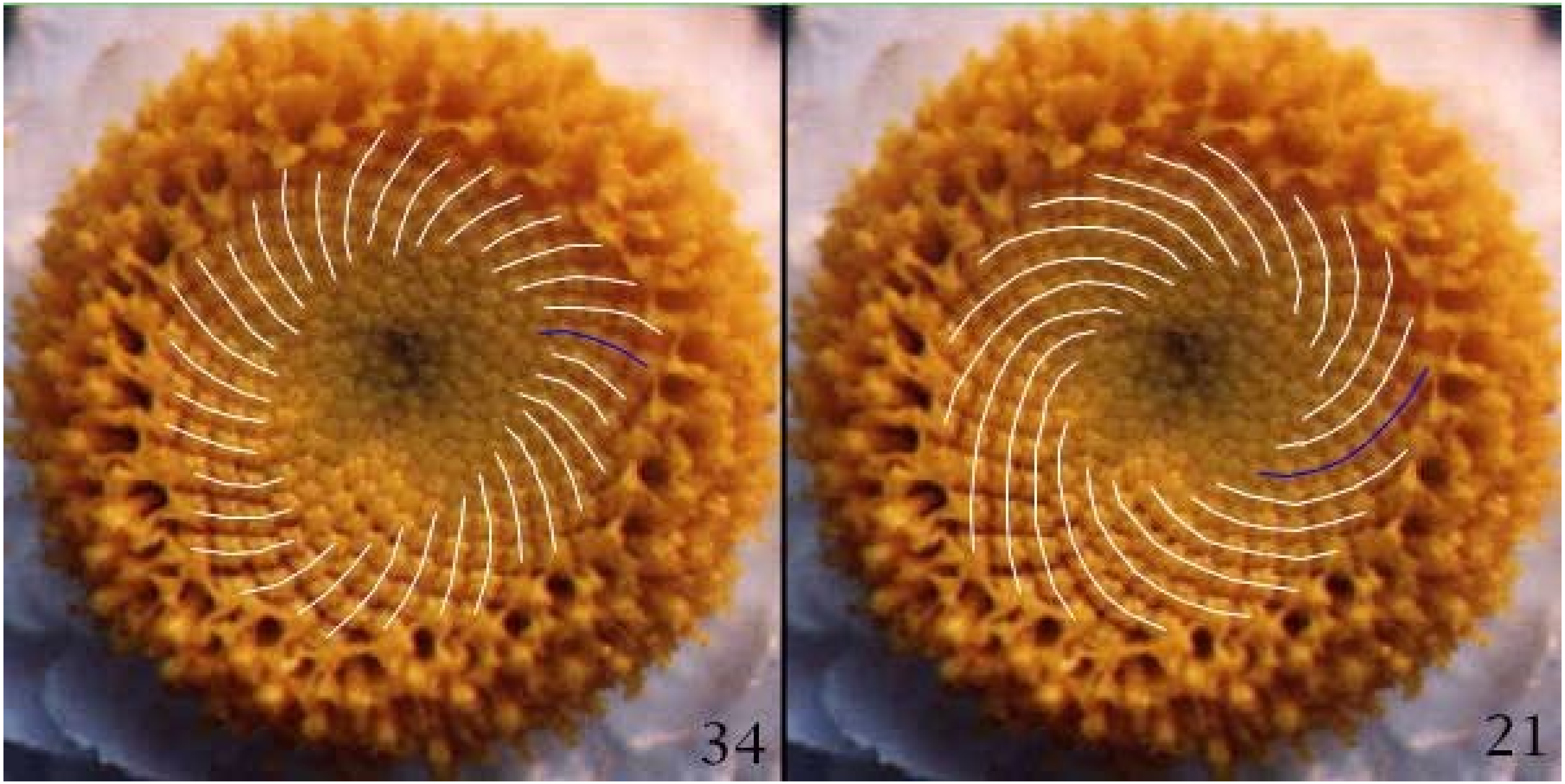
$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233$$

La **phyllotaxie** est l’ordre dans lequel sont implantés les feuilles ou les rameaux sur la tige d’une plante, ou, par extension, la disposition des éléments d’un fruit, d’une fleur, d’un bourgeon.   (*Wikipedia*)

La **phyllotaxie** désigne également la science qui étudie ces arrangements.



http://curiosamathematica.tumblr.com/post/114294953296/golden-ratio-in-phyllotaxis



http://scotton.freeshell.org/phyllo/phyllo.html

Nombre de tours / nombre de feuilles avant de retrouver la même configuration

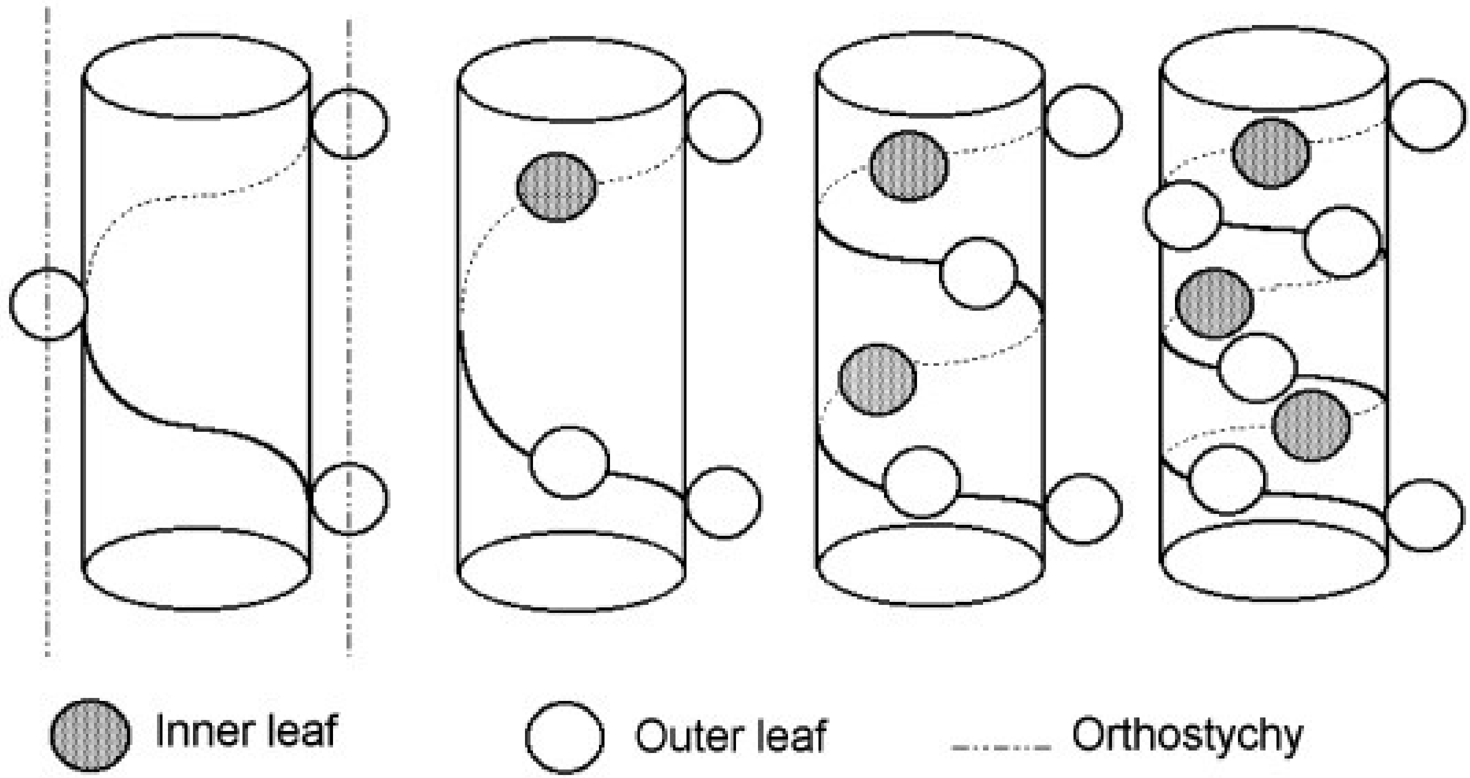
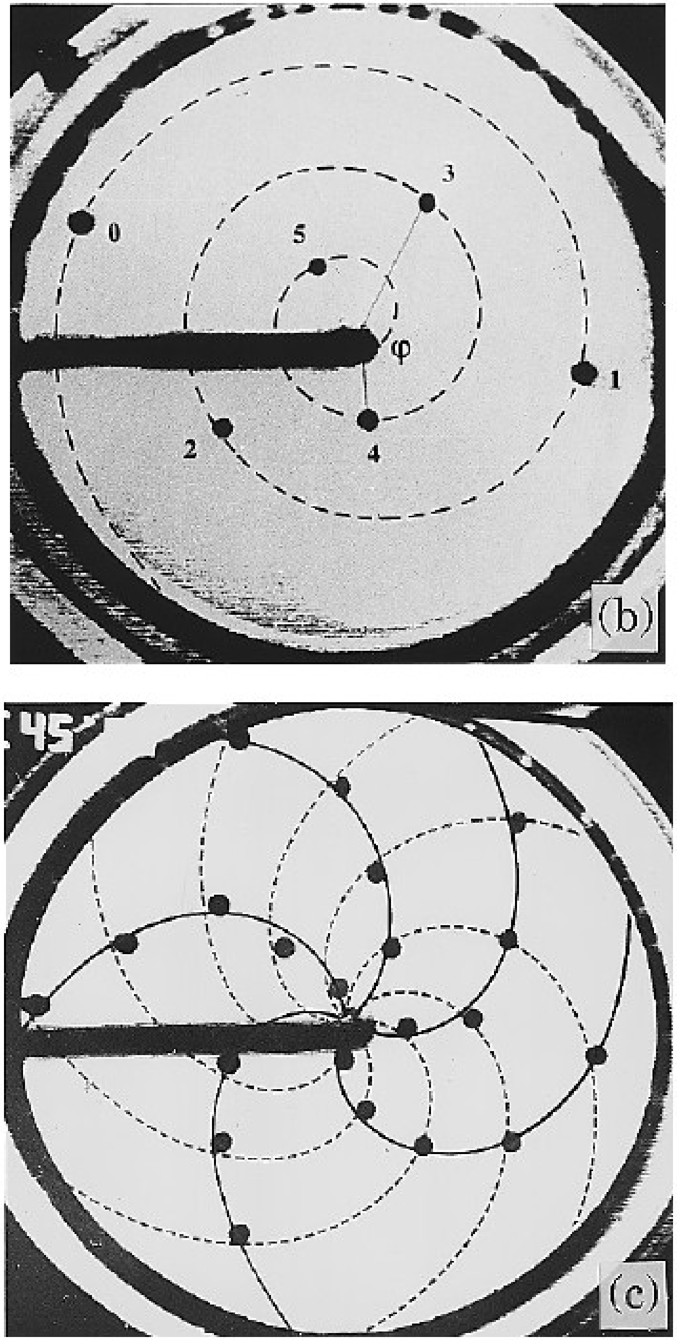


Figure 5.20. Four first Fibonacci types of spiral phyllotaxis: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, and $\frac{3}{8}$.

http://www.brainkart.com/article/Morphology-of-the-Stem_17042/



Typical phyllotactic patterns formed by the ferrofluid drops for different values of the control parameter G.

The drops are visible as dark dots. The tube for the ferrofluid supply partially hides the central truncated cone. The drops are numbered in their order of formation.

Cadre général

Soient $a_{k-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{C}$ avec $a_0 \neq 0$.

Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est dite linéaire récurrente homogène d'ordre k (ou de degré k) si elle satisfait, pour tout $n \geq 0$, une *relation de récurrence linéaire homogène* (à coefficients constants)

$$\boxed{x_{n+k} = a_{k-1}\, x_{n+k-1} + \cdots + a_0\, x_n} \tag{1}$$

ou encore,

$$x_{n+k} - a_{k-1}\, x_{n+k-1} - \cdots - a_0\, x_n = 0.$$

Les k premières valeurs $x_0, \ldots, x_{k-1}$ sont appelées les *conditions initiales*.

Remarque si $a_0 = 0$, le premier terme de la suite n'a aucune influence

$$x_{n+3} = 2x_{n+2} + x_{n+1}$$

$$1, 2, 3, 8, 19, 46, 111, 268, 647, 1562, 3771$$

$$7, 2, 3, 8, 19, 46, 111, 268, 647, 1562, 3771$$

Autant étudier la relation $x_{n+2} = 2x_{n+1} + x_n$.

On peut généraliser à $a_0 = \cdots = a_j = 0$.

Se donner des conditions initiales détermine complètement la solution de (1)

Remarque

Pour une même relation de récurrence, à chaque k-uple de conditions initiales, correspond exactement une suite de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

$$(0,1) \leftrightarrow 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \dots$$

$$(1,3) \leftrightarrow 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843, \dots$$

$$(2,4) \leftrightarrow 2, 4, 6, 10, 16, 26, 42, 68, 110, 178, 288, 466, 754, 1220, \dots$$

On a une bijection entre $\mathbb{C}^k$ (l'ensemble des conditions initiales) et l'ensemble des solutions de (1).

Proposition

L'ensemble des solutions de l'équation de récurrence linéaire (1) d'ordre k est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ isomorphe à $\mathbb{C}^k$.

$$1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843, \ldots$$

$$2, 2, 4, 6, 10, 16, 26, 42, 68, 110, 178, 288, 466, 754, \ldots$$

$$3, 5, ?, \ldots$$

$$2, 6, ?, \ldots$$

Dans un espace vectoriel, on a les opérations d'addition et de multiplication par un scalaire

$$\left.\begin{aligned} x_{n+2} &= x_{n+1} + x_n \\ y_{n+2} &= y_{n+1} + y_n \end{aligned}\right\} \Rightarrow (x_{n+2}+y_{n+2}) = (x_{n+1}+y_{n+1})+(x_n+y_n)$$

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \Rightarrow (\alpha x_{n+2}) = (\alpha x_{n+1}) + (\alpha x_n)$$

On a le même type de résultat que pour les systèmes d'équations linéaires homogènes :

- la somme de deux solutions d'un système homogène est encore solution

$$Ax = 0, \; Ax' = 0 \Rightarrow A(x + x') = 0;$$

- idem pour une solution multipliée par un scalaire

$$Ax = 0 \Rightarrow A(\alpha x) = 0.$$

Proposition

L'ensemble des solutions de l'équation de récurrence linéaire (1) d'ordre k est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ de dimension k.

Il suffit donc d'avoir k solutions de (1) linéairement indépendantes pour avoir une base de l'ensemble des solutions.

$$(x_n^{(1)})_{n\geq 0} = 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843, \ldots$$

$$(x_n^{(2)})_{n\geq 0} = 2, 2, 4, 6, 10, 16, 26, 42, 68, 110, 178, 288, 466, 754, \ldots$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = -4 \neq 0$$

k vecteurs colonnes de dimension k sont linéairement indépendants si et seulement si le déterminant correspondant est $\neq 0$.

Sur l'exemple, toute solution de (1) est donc combinaison linéaire de $(x_n^{(1)})_{n\geq 0}$ et $(x_n^{(2)})_{n\geq 0}$

$$(z_n)_{n\geq 0} = 0, 4, 4, 8, 12, 20, 32, 52, 84, 136, 220, 356, 576, 932, \ldots$$

$$(x_n^{(1)})_{n\geq 0} = 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843, \ldots$$

$$(x_n^{(2)})_{n\geq 0} = 2, 2, 4, 6, 10, 16, 26, 42, 68, 110, 178, 288, 466, 754, \ldots$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$z_n = 2x_n^{(1)} - x_n^{(2)}$$

Remarque

Une même suite peut être solution de plusieurs relations de récurrence.

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$$

$$x_{n+4} = x_{n+3} + x_{n+2} = (x_{n+2} + x_{n+1}) + (x_{n+1} + x_n) = x_{n+2} + 2x_{n+1} + x_n$$

Comment trouver l'ordre minimal d'une récurrence ?

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \dots$$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 0$$

car la $3e$ colonne est combinaison des deux premières.

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \ldots$$

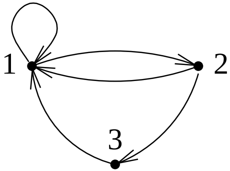
$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{et} \quad \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$$

Proposition (matrice de Hankel)

L'ordre minimal d'une relation de récurrence pour une solution donnée $(u_n)_{n \geq 0}$ est le plus grand entier k tel que

$$\det \begin{pmatrix} u_0 & u_1 & \cdots & u_{k-1} \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_k \\ \vdots & & & \vdots \\ u_{k-1} & u_k & \cdots & u_{2k-2} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Un autre exemple (récapitulatif)



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1$$

Le nombre de chemins de v_i vers v_j vérifie

$$x_{n+3} = x_{n+2} + x_{n+1} + x_n \quad \forall n \geq 0$$

$$x_{n+3} = x_{n+2} + x_{n+1} + x_n \quad \forall n \geq 0$$

$v_i \to v_j$	0	1	2	
$1 \to 1$	1	1	2	$4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274, \ldots$
$1 \to 2$	0	1	1	$2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, \ldots$
$1 \to 3$	0	0	1	$1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, \ldots$
$2 \to 1$	0	1	2	$3, 6, 11, 20, 37, 68, 125, 230, \ldots$
$2 \to 2$	1	0	1	$2, 3, 6, 11, 20, 37, 68, 125, \ldots$
$2 \to 3$	0	1	0	$1, 2, 3, 6, 11, 20, 37, 68, \ldots$

Les 3 premières suites (par exemple) forment une base de l'espace des solutions

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

Structure générale des solutions

$$x_{n+k} = a_{k-1}\, x_{n+k-1} + \cdots + a_0\, x_n$$

A l'équation (1), on associe le polynôme de $\mathbb{C}[X]$

$$\boxed{\chi(X) = X^k - a_{k-1}\, X^{k-1} - \cdots - a_1\, X - a_0.}$$

Ce polynôme de degré k est le polynôme caractéristique de la relation de récurrence

Le théorème fondamental de l'algèbre stipule que, dans $\mathbb{C}$, un polynôme de degré k possède exactement k zéros comptés avec leur multiplicité. Il se factorise donc complètement en un produit de facteurs du premier degré.

Théorème

Si on dispose de la factorisation

$$\chi(X) = \prod_{j=1}^{r} (X - \alpha_j)^{m_j}$$

où les α_i sont les zéros de $\chi(X)$ de multiplicité m_i ($m_1 + m_2 + \cdots + m_r = k$), alors pour tout $j \in \{1, \ldots, r\}$ et tout $t < m_j$, la suite

$$(n^t \, \alpha_j^n)_{n \in \mathbb{N}}$$

est une solution de l'équation linéaire homogène (1).

Idée de la preuve : Il faut vérifier que, pour tout n,

$$(n+k)^t \, \alpha_j^{n+k} - a_{k-1} \, (n+k-1)^t \alpha_j^{n+k-1} - \cdots - a_0 \, n^t \alpha_j^n = 0.$$

Ce théorème fournit $m_1 + m_2 + \cdots + m_r = k$ solutions de (1) :

$$\left\{ \begin{array}{c} (\alpha_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, (n\,\alpha_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, (n^{m_1-1}\,\alpha_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, \\ (\alpha_2^n)_{n\in\mathbb{N}}, (n\,\alpha_2^n)_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, (n^{m_2-1}\alpha_2^n)_{n\in\mathbb{N}}, \\ \vdots \\ (\alpha_r^n)_{n\in\mathbb{N}}, (n\,\alpha_r^n)_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, (n^{m_r-1}\,\alpha_r^n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array} \right.$$

Or, l'ensemble des solutions est de dimension k...

A-t-on une base de l'ensemble des solutions ?

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_1 \\ \alpha_1^2 \\ \vdots \\ \alpha_1^{k-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_1 \\ 2\alpha_1^2 \\ \vdots \\ (k-1)\alpha_1^{k-1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_1 \\ 2^{m_1-1}\alpha_1^2 \\ \vdots \\ (k-1)^{m_1-1}\alpha_1^{k-1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_r \\ \alpha_r^2 \\ \vdots \\ \alpha_r^{k-1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_r \\ 2^{m_r-1}\alpha_r^2 \\ \vdots \\ (k-1)^{m_r-1}\alpha_r^{k-1} \end{pmatrix}$$

forment une base de $\mathbb{C}^k$ si et seulement si

$$\det \left(n^t \, \alpha_i^n \right)_{\substack{n=0,\ldots,k-1; \\ i=1,\ldots,r;\, t=0,\ldots,m_i-1}}$$

donnée par (admis)

$$\prod_{i=1}^{r} 0!\, 1! \,\cdots\, (m_i-1)!\ \alpha_i^{m_i(m_i-1)/2} \ \prod_{i<j} (\alpha_i - \alpha_j)^{m_i m_j} \neq 0.$$

En conclusion, on a une base de l'espace des solutions

$$\left\{\begin{array}{c} (\alpha_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, (n\,\alpha_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, (n^{m_1-1}\,\alpha_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, \\ (\alpha_2^n)_{n\in\mathbb{N}}, (n\,\alpha_2^n)_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, (n^{m_2-1}\alpha_2^n)_{n\in\mathbb{N}}, \\ \vdots \\ (\alpha_r^n)_{n\in\mathbb{N}}, (n\,\alpha_r^n)_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, (n^{m_r-1}\,\alpha_r^n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array}\right.$$

Théorème

La *solution générale* de l'équation linéaire récurrente homogène (1) est donnée par la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général

$$\boxed{s_n = \sum_{i=1}^{r} P_i(n)\,\alpha_i^n}$$

où P_i est un polynôme de degré strictement inférieur à m_i.
Les coefficients des polynômes P_i sont déterminés par les conditions initiales.

Quelques exemples

$$\begin{cases} x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, \quad \forall n \geq 0 \\ x_0 = 0, \quad x_1 = 1 \end{cases}$$

$$\chi(X) = X^2 - X - 1 = \left(X - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(X - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

donc

$$x_n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

on détermine A, B avec les conditions initiales

$$x_0 = 0 = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0$$

$$x_1 = 1 = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} 0 & = & A+B \\ 1 & = & \frac{A+B}{2} + \sqrt{5}\,\frac{A-B}{2} \end{array}\right.$$

$$A = \frac{\sqrt{5}}{5}, \quad B = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$x_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$x_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1,618, \quad \frac{1-\sqrt{5}}{2} \simeq -0,618$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{\varphi^n} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Considérons la suite satisfaisant pour tout $n \geq 0$, l'équation linéaire récurrente suivante

$$x_{n+4} = 6x_{n+3} - 13x_{n+2} + 24x_{n+1} - 36x_n$$

avec $x_0 = 0, x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 1$.

$$\chi(X) = X^4 - 6X^3 + 13X^2 - 24X + 36 = (X-3)^2(X-2i)(X+2i).$$

La solution générale de la récurrence est de la forme

$$x_n = (c_1 n + c_2)\, 3^n + c_3\,(2i)^n + c_4(-2i)^n.$$

On résout le système

$$\begin{cases} x_0 = 0 & = & c_2 + c_3 + c_4 \\ x_1 = 2 & = & 3c_1 + 3c_2 + 2ic_3 - 2ic_4 \\ x_2 = 1 & = & 18c_1 + 9c_2 - 4c_3 - 4c_4 \\ x_3 = 1 & = & 81c_1 + 27c_2 - 8ic_3 + 8ic_4 \end{cases}$$

$$c_1 = \frac{2}{13},\ \ c_2 = -\frac{23}{169},\ \ c_3 = \frac{23}{338} - \frac{329}{676}i,\ \ c_4 = \overline{c_3}.$$

Remarquons que

$$c_3(2i)^n + c_4(-2i)^n = c_3\,(2i)^n + \overline{c_3\,(2i)^n} = 2\,\mathfrak{Re}(c_3\,(2i)^n).$$

De là, on obtient la forme close pour tout $n \geq 0$,

$$x_n = \frac{2}{13}\,n\,3^n - \frac{23}{169}\,3^n + \frac{23}{338}\,2^{n+1}\,\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) - \frac{329}{676}\,2^{n+1}\,\cos\left((n+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

Les premiers termes de la suite sont

$$0, 2, 1, 1, 41, 185, 565, 1933, 7217, 25073, 82669, 273685, 909353, \ldots.$$