Introduction aux mathématiques discrètes (4)

Michel Rigo

http://www.discmath.ulg.ac.be/

Année 2018–2019

Quand l'algèbre linéaire rencontre les graphes. . .

- matrice d'adjacence
- graphe biparti
- compter des chemins
- compter des sous-arbres couvrants
- théorème de Perron
- application au PageRank

Définition

Soit $G = (V, E)$ un multi-graphe orienté, $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$.
$A(G)$: matrice d'adjacence de G, $\forall 1 \leq i, j \leq n$,

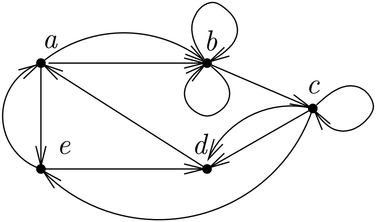
$$[A(G)]_{i,j} = \# \text{ arcs } (v_i, v_j) \text{ de } E.$$

Définition (cas particulier)

Soit $G = (V, E)$ un multi-graphe non orienté, $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$.
$A(G)$: matrice d'adjacence de G, $\forall 1 \leq i, j \leq n$

$$[A(G)]_{i,j} = \# \text{ arêtes } \{v_i, v_j\} \text{ de } E.$$

La matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est *symétrique*.



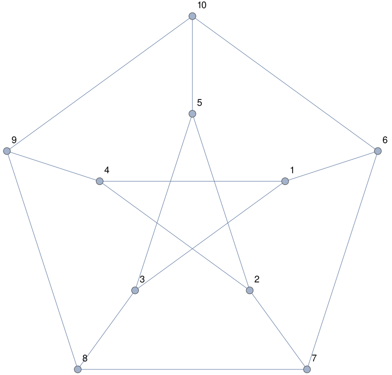
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

somme des éléments d'une ligne $= d^+(v)$
somme des éléments d'une colonne $= d^-(v)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

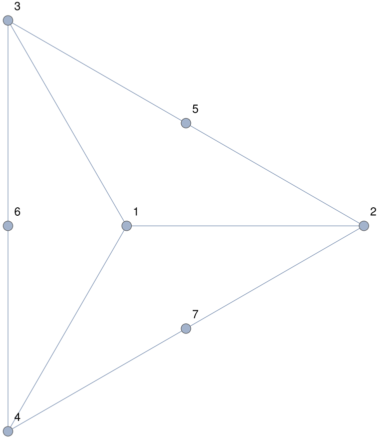


$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}$$

Ici, on a une matrice symétrique.

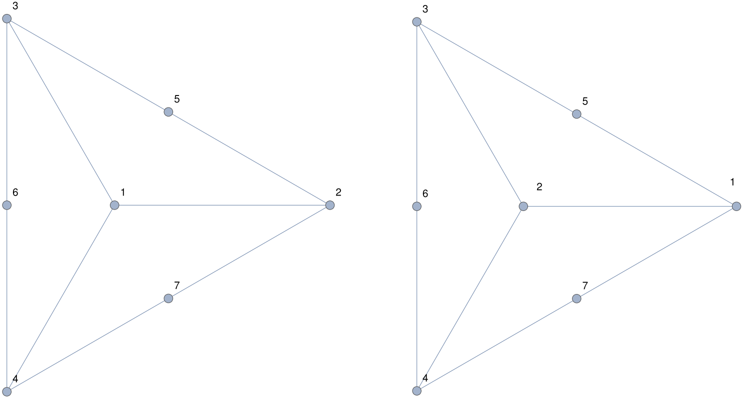
Remarque

Si on avait une boucle, on aurait un élément diagonal égal à 1 (contribution simple).



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Deux graphes isomorphes : on a inversé la numérotation des sommets 1 et 2



On applique une matrice de permutation

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pour obtenir la nouvelle matrice d'adjacence à partir de l'ancienne

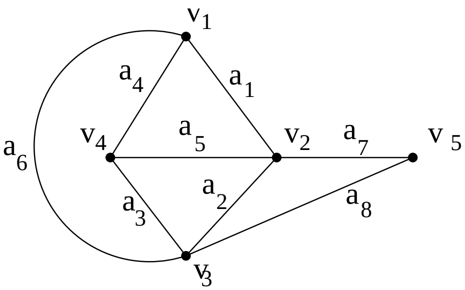
$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

revient à permuter les lignes et colonnes 1 et 2.

Proposition

Deux graphes G_1 et G_2 sont isomorphes si et seulement si ils ont, à une permutation près, la même matrice d'adjacence.

→ polynôme caractéristique de G et valeurs propres de G.



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_G(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda^5 + 8\lambda^3 + 10\lambda^2 + \lambda - 2.$$

Indépendant de la numérotation choisie

$$\chi_G(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det(P^{-1}) \det(A - \lambda I) \det(P)$$
$$= \det(P^{-1} A P - \lambda I)$$

Proposition

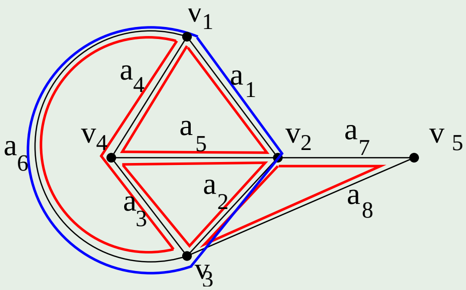
Soit G un graphe non orienté. Si le polynôme caractéristique de $G = (V, E)$ est de la forme

$$\chi_G(\lambda) = (-\lambda)^n + c_1(-\lambda)^{n-1} + c_2(-\lambda)^{n-2} + \cdots + c_n,$$

- c_1 est le nombre de boucles de G, en particulier, si G est simple, $c_1 = 0$.
- Si G est simple, alors $-c_2$ est le nombre d'arêtes de G.
- Si G est simple, alors c_3 est le double du nombre de triangles de G.

La preuve repose sur un résultat d'algèbre permettant d'exprimer les c_i à partir de déterminants de certaines sous-matrices, e.g., $c_1 = \mathrm{tr}\, A =$somme des éléments diagonaux, ..., $c_n = \det A$.

Exemple



$$\chi_G(\lambda) = -\lambda^5 + 8\lambda^3 + 10\lambda^2 + \lambda - 2.$$

- $c_1 = 0$ boucle,
- $-c_2 = 8$ arêtes,
- $c_3 = 10$ (triangles $\times 2$)

Caractérisation algébrique des graphes bipartis

PROPOSITION

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple, non orienté et biparti. Si λ est valeur propre de G, alors $-\lambda$ l'est aussi avec la même multiplicité.

Le spectre d'un graphe biparti est symétrique par rapport à 0.

La réciproque est également vraie.

Par hypothèse, V se partitionne en deux sous-ensembles V_1 et V_2 de manière telle que toute arête de G est de la forme $\{u, v\}$ avec $u \in V_1$ et $v \in V_2$. Si on ordonne les sommets de V de manière à considérer tout d'abord les sommets de V_1, alors $A(G)$ a la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & B \\ \widetilde{B} & 0 \end{pmatrix}$$

où B est une matrice de dimension $\# V_1 \times \# V_2$.

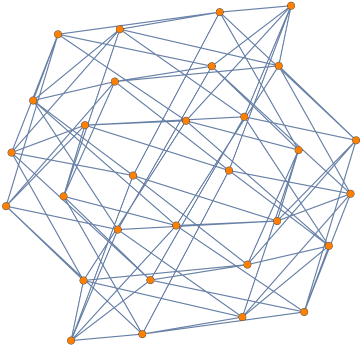
Soit x un vecteur propre non nul de $A(G)$ de valeur propre λ. Appelons x_1 (resp. x_2) le vecteur obtenu en considérant les $\# V_1$ premières (resp. les $\# V_2$ dernières) composantes de x. Ainsi,

$$\begin{pmatrix} 0 & B \\ \widetilde{B} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Bx_2 \\ \widetilde{B}x_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

vecteur propre non nul de valeur propre $-\lambda$,

$$\begin{pmatrix} 0 & B \\ \widetilde{B} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Bx_2 \\ \widetilde{B}x_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}.$$

Illustration : voici un graphe biparti (graphe de Kesner)



$$-6(1\times), -3(5\times), -1(9\times), 1(9\times), 3(5\times), 6(1\times)$$

Théorème

Soit $G = (V, E)$ un multi-graphe (orienté ou non) tel que $V = \{v_1, \ldots, v_k\}$. Pour tous $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ et pour tout $n > 0$,

$$[A(G)^n]_{i,j}$$

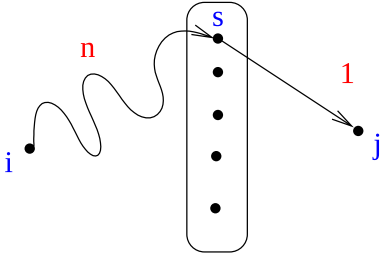
est le nombre de chemins de longueur n joignant v_i à v_j.

Par récurrence sur n. Le cas $n = 1$, définition de la matrice d'adjacence.

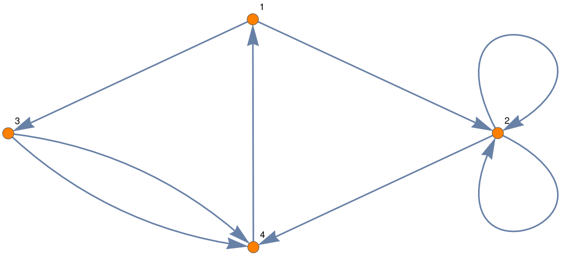
Supposons OK pour $n > 0$ et vérifions-le pour $n + 1$.

$$[A(G)^{n+1}]_{i,j} = \sum_{s=1}^{k} [A(G)^n]_{i,s} \, [A(G)]_{s,j} \, .$$

$$[A(G)^{n+1}]_{i,j} = \sum_{s=1}^{k} [A(G)^n]_{i,s} \, [A(G)]_{s,j} \, .$$



$[A(G)^n]_{i,s}$ = nombre de chemins de longueur n joignant v_i à v_s
$[A(G)]_{s,j}$ = nombre d'arcs/arêtes joignant v_s à v_j.
Par conséquent, $[A(G)^n]_{i,s} \, [A(G)]_{s,j}$ compte le nombre de chemins de longueur $n+1$ joignant v_i à v_j en passant par v_s.



$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 9 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{A^3}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 11 & 3 & 4 \\ 4 & 20 & 2 & 11 \\ 0 & 4 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{A^4}$$

$$A^5 = \begin{pmatrix} 4 & 24 & 2 & 17 \\ 11 & 44 & 4 & 24 \\ 6 & 8 & 0 & 4 \\ 2 & 11 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad A^6 = \begin{pmatrix} 17 & 52 & 4 & 28 \\ 24 & 99 & 11 & 52 \\ 4 & 22 & 6 & 8 \\ 4 & 24 & 2 & 17 \end{pmatrix}$$

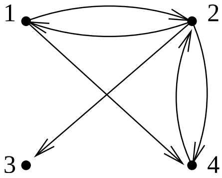
Compter les sous-arbres couvrants, pointés et orientés depuis la racine dans un **multi-graphe orienté** $G = (V, E)$ où $V = \{v_1, \dots, v_n\}$.

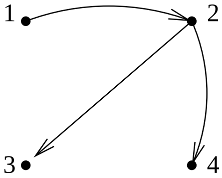
Nous supposerons le multi-graphe **sans boucle**.

Définition

Un arbre pointé est orienté depuis la racine si les arcs de celui-ci sont tous orientés des sommets de niveau i vers les sommets de niveau $i + 1$

Le graphe non orienté sous-jacent est lui-même un arbre.





Soit $G = (V, E)$ un multi-graphe orienté sans boucle dont les sommets sont ordonnés par $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$.

Définition

La matrice $D(G)$ de demi-degré entrant est définie par

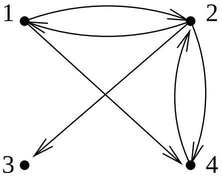
$$[D(G)]_{j,j} = d^-(v_j)$$

et

$$[D(G)]_{i,j} = -(\#(\omega^+(v_i) \cap \omega^-(v_j))), \text{ si } i \neq j.$$

Autrement dit, $[D(G)]_{i,j}$ est l'opposé du nombre d'arcs joignant v_i à v_j, si $i \neq j$.

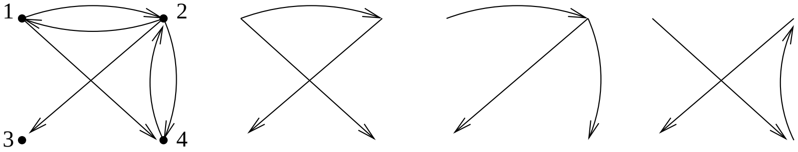
La somme des éléments de toute colonne de $D(G)$ est nulle.



$$D(G) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Théorème Bott–Mayberry

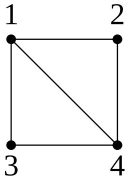
Soit G un multi-graphe orienté sans boucle. Le nombre de sous-arbres couvrant G pointés au sommet v_i et orientés est égal au mineur $M_{i,i}(G)$ de la matrice $D(G)$, c'est-à-dire au déterminant de $D(G)$ privé de sa $i$ème ligne et de sa $i$ème colonne.

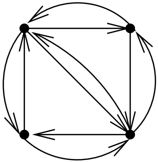


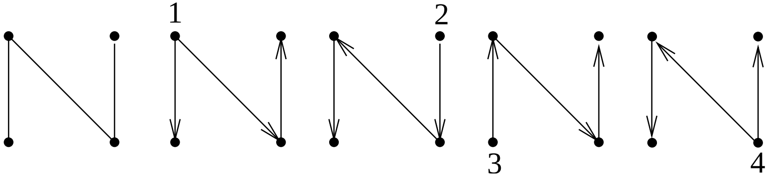
$$D(G) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad M_{1,1} = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 3.$$

Corollaire (Kirchoff)

Le nombre de sous-arbres couvrant un multi-graphe $G = (V, E)$ non orienté sans boucle, et pour lequel les sommets ont été numérotés, vaut $M_{i,i}(G')$ quel que soit i, où G' est le graphe symétrique (orienté) déduit de G.



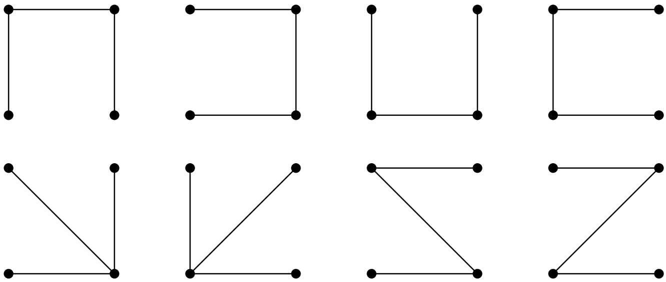




A un arbre non orienté correspond exactement un arbre orienté avec racine fixée.

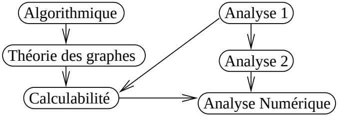
$$D(G') = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

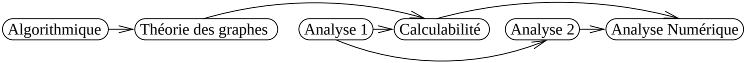
Tous les mineurs principaux valent 8.



Il ne s'agit pas d'un comptage à isomorphisme près.

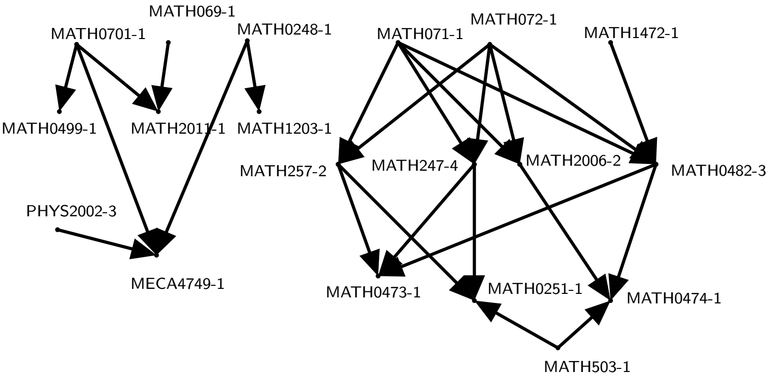
Tri topologique





déterminer une indexation des sommets d'un graphe orienté sans cycle de manière telle que s'il existe un arc de v_i *à* v_j*, alors* $i < j$.

Tri topologique



sous-graphe des prérequis, bachelier sc. math., 2015–2016

Tri topologique

On peut se limiter au cas des graphes simples.

Lemme

Si un graphe simple (fini) orienté $G = (V, E)$ est sans cycle, alors $\exists\ v$ tel que $d^-(v) = 0$ (resp. $d^+(v) = 0$).

Considérer un chemin simple $(x_1, \dots, x_k)$ de G de longueur maximale déterminé par des sommets de G.

Tri topologique

Proposition

Un graphe simple (fini) orienté $G = (V, E)$ est sans cycle

SSI

$\exists v \in V$ tel que $d^-(v) = 0$ et
$\forall v$ tel que $d^-(v) = 0$, le graphe $G - v$ est sans cycle.

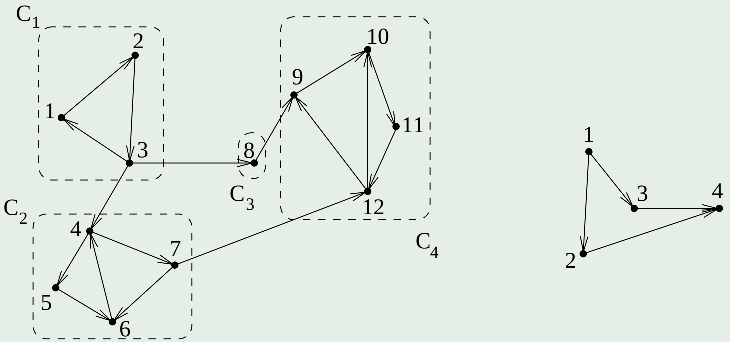
Théorème

Un graphe simple (fini) orienté $G = (V, E)$ est sans cycle SSI il est possible d'énumérer les sommets de $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ t.q. $\forall i = 1, \ldots, n$, le demi-degré entrant de v_i restreint au graphe $G_i = G - v_1 - \cdots - v_{i-1}$ soit nul : $d^-_{G_i}(v_i) = 0$.

$\rightsquigarrow$ On a donc une énumération des sommets

Graphe ayant plusieurs composantes fortement connexes

Exemple



On considère le condensé $\mathcal{C}$ d'un graphe G (ou graphe acyclique des composantes).

On peut ordonner les sommets de $\mathcal{C}$ par tri topologique des composantes.

Par conséquent, on obtient une matrice bloc triangulaire supérieure :

$$A(G) = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

Remarque

Le spectre d'un graphe est l'union des spectres de ses composantes connexes.

Matrices irréductibles et primitives. . .

Par convention, un vecteur propre à droite est un vecteur colonne

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } \widetilde{v} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Attention à l'ordre des quantificateurs...

Définition

Une matrice carrée $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ à coefficients (réels) ≥ 0 est irréductible, si pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, il existe $N(i,j)$ tel que

$$[A^{N(i,j)}]_{i,j} > 0.$$

Définition

Une matrice carrée $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ à coefficients (réels) ≥ 0 est primitive, s'il existe N tel que pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$

$$[A^N]_{i,j} > 0$$

ce que l'on s'autorise à noter $A^N > 0$

primitif $\Rightarrow$ irréductible

Interprétation

Un multi-graphe orienté (resp. non orienté) G
est fortement connexe (resp. connexe) SSI
sa matrice d'adjacence $A(G)$ est irréductible.

Par abus de langage, on parle de graphe irréductible

Si $A(G)$ est de plus primitif,

- le graphe est non seulement connexe et
- il existe N tel que, quelle que soit la paire de sommets considérée, il existe un chemin de longueur N les joignant.

Par abus de langage, on parle de graphe primitif

Un "gros" théorème d'algèbre linéaire

Théorème de Perron

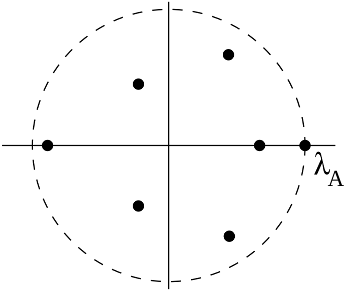
Soit $A \geq 0$ une matrice carrée primitive de dimension n.

- La matrice A possède un vecteur propre $v_A \in \mathbb{R}^n$ (resp. $w_A \in \mathbb{R}^n$) dont les composantes sont toutes strictement positives et correspondant à une valeur propre $\lambda_A > 0$,

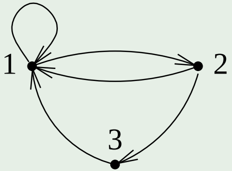
$$A\, v_A = \lambda_A\, v_A \text{ (resp. } \widetilde{w_A}\, A = \lambda_A\, \widetilde{w_A}\text{)}.$$

- Cette valeur propre λ_A possède une multiplicité algébrique (et géométrique) simple.
- Tout vecteur propre de A dont les composantes sont strictement positives est un multiple de v_A.
- Toute autre valeur propre $\mu \in \mathbb{C}$ de A est telle que $|\mu| < \lambda_A$.

La valeur propre de Perron λ_A est l'unique valeur propre *dominante*. Toute autre valeur propre de A a un module **strictement** inférieur à λ_A.



Exemple, cas primitif



$$A(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A(G)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A(G)^3 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} > 0.$$

$$1 \to 1 \to 1 \to 1, \quad 1 \to 1 \to 1 \to 2, \quad 1 \to 1 \to 2 \to 3$$
$$2 \to 1 \to 1 \to 1, \quad 2 \to 1 \to 1 \to 2, \quad 2 \to 1 \to 2 \to 3$$
$$3 \to 1 \to 1 \to 1, \quad 3 \to 1 \to 1 \to 2, \quad 3 \to 1 \to 2 \to 3.$$

$$\lambda_A \simeq 1.83929, \;\; \lambda_{2,3} \simeq -0.41964 \pm 0.60629\, i.$$

Corollaire du thm. de Perron

Si A est une matrice primitive,

$$\boxed{A^k = \lambda_A^k \, v_A \, \widetilde{w_A} + o(\lambda_A^k)}$$

où v_A et $\widetilde{w_A}$ sont des vecteurs propres choisis t.q. $\widetilde{w_A}.v_A = 1$.

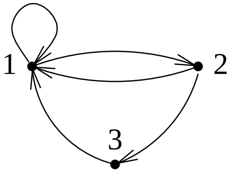
Autrement dit, $\frac{A^k}{\lambda_A^k}$ tend vers une matrice constante, $k \to \infty$.

Exemple

$f(x)$ est en $o(g)$ si f/g tend vers 0 si $x \to \infty$.

$$x^3 + 5x^2 + 8 = x^3 + o(x^3)$$

Il est Possible d'obtenir des développements plus fins du terme d'erreur en l'exprimant à l'aide de la deuxième valeur propre de A (par module décroissant).



$$A(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_A \simeq 1.83929$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{A(G)^n}{\lambda_A^n} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0.61842 & 0.336228 & 0.182804 \\ 0.519032 & 0.282192 & 0.153425 \\ 0.336228 & 0.182804 & 0.0993883 \end{pmatrix}}_{\text{matrice constante}}$$

Corollaire

Dans la cas d'un graphe primitif, on connaît le *comportement asymptotique* du nombre de chemins de longueur n entre deux sommets.

vecteur propre à droite

$$v_A = \begin{pmatrix} 1.83929 \\ 1.54369 \\ 1 \end{pmatrix}$$

vecteur propre à gauche

$$\widetilde{w_A} = \begin{pmatrix} 3.38298 & 1.83929 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{w_A}.v_A = 10.0615$$

$$\frac{1}{10.0615} \begin{pmatrix} 1.83929 \\ 1.54369 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3.38298 & 1.83929 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.61842 & 0.336228 & 0.182804 \\ 0.519032 & 0.282192 & 0.153425 \\ 0.336228 & 0.182804 & 0.0993883 \end{pmatrix}$$

Théorème de Perron–Frobenius

Soit $A \geq 0$ une matrice carrée irréductible de dimension n.

- La matrice A possède un vecteur propre $v_A \in \mathbb{R}^n$ (resp. $w_A \in \mathbb{R}^n$) dont les composantes sont toutes strictement positives et correspondant à une valeur propre $\lambda_A > 0$,

$$A\, v_A = \lambda_A\, v_A \text{ (resp. } \widetilde{w_A}\, A = \lambda_A\, \widetilde{w_A}\text{).}$$

- Cette valeur propre λ_A possède une multiplicité algébrique (et géométrique) simple.
- Tout vecteur propre de A dont les composantes sont strictement positives est un multiple de v_A.
- Toute autre valeur propre $\mu \in \mathbb{C}$ de A est telle que $|\mu| \leq \lambda_A$.
- Il existe $d \geq 1$ tel que si μ est une valeur propre de A telle que $|\mu| = \lambda_A$, alors $\mu = \lambda_A\, e^{2ik\pi/d}$ et pour tout $k \in \{0, \ldots, d-1\}$, $\lambda_A\, e^{2ik\pi/d}$ est une valeur propre de A.

Théorème de Perron–Frobenius

Soit $A \geq 0$ une matrice carrée irréductible de dimension n.

- La matrice A possède un vecteur propre $v_A \in \mathbb{R}^n$ (resp. $w_A \in \mathbb{R}^n$) dont les composantes sont toutes strictement positives et correspondant à une valeur propre $\lambda_A > 0$,

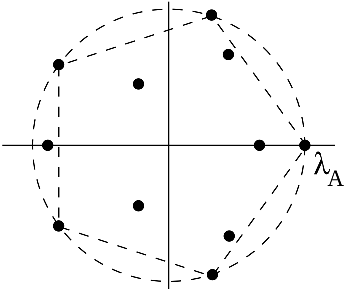
$$A\, v_A = \lambda_A\, v_A \text{ (resp. } \widetilde{w_A}\, A = \lambda_A\, \widetilde{w_A}).$$

- Cette valeur propre λ_A possède une multiplicité algébrique (et géométrique) simple.
- Tout vecteur propre de A dont les composantes sont strictement positives est un multiple de v_A.
- Toute autre valeur propre $\mu \in \mathbb{C}$ de A est telle que $|\mu| \leq \lambda_A$.
- Il existe $d \geq 1$ tel que si μ est une valeur propre de A telle que $|\mu| = \lambda_A$, alors $\mu = \lambda_A\, e^{2ik\pi/d}$ et pour tout $k \in \{0, \ldots, d-1\}$, $\lambda_A\, e^{2ik\pi/d}$ est une valeur propre de A.

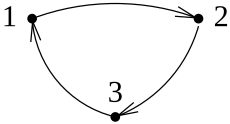
La valeur propre λ_A est la valeur propre de Perron de A.

Une matrice irréductible possède toujours une valeur propre réelle dominante λ_A.

On peut avoir **d'autres valeurs propres** de module égal à λ_A mais dans ce cas, celles-ci sont exactement obtenues par multiplication de λ_A par les racines d-ièmes de l'unité.



irréductible $\not\Rightarrow$ primitif



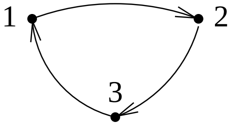
$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le graphe est f. connexe donc $A(G)$ est irréductible.
Mais $A(G)$ n'est pas primitif.

$$A(G)^{3n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; A(G)^{3n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A(G)^{3n+2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour joindre deux sommets fixés, uniquement certaines longueurs de chemin peuvent être considérées.



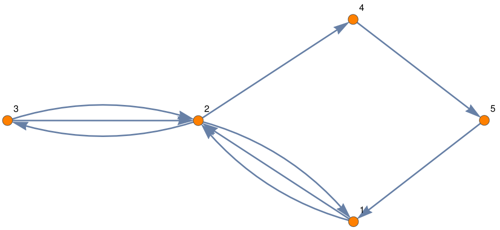
$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont les racines cubiques de l'unité $(d = 3)$

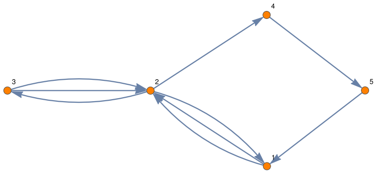
$$\lambda_A = 1,\ \ e^{2i\pi/3},\ \ e^{4i\pi/3}$$

plusieurs valeurs propres de module maximum $(= 1)$.

- La période d'un sommet est le pgcd des longueurs des cycles passant par ce sommet.
- On peut montrer que tous les sommets d'une même composante f. connexe ont même période.
- On parle de la période d'une composante ou d'un graphe f. connexe.



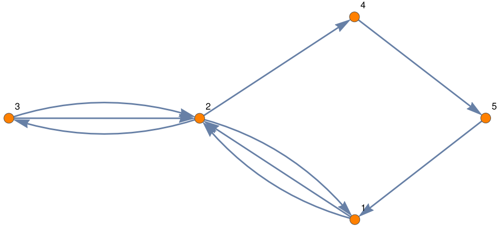
période 2



$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 8 & 8 & 0 \\ 0 & 18 & 0 & 0 & 4 \\ 10 & 0 & 8 & 8 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 36 & 0 & 0 & 8 \\ 22 & 0 & 18 & 18 & 0 \\ 0 & 36 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 2 \\ 10 & 0 & 8 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

Lien avec le théorème de Perron–Frobenius,



$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Il existe $d \geq 1$ tel que si μ est une valeur propre de A telle que $|\mu| = \lambda_A$, alors $\mu = \lambda_A\, e^{2ik\pi/d}$ et pour tout $k \in \{0, \ldots, d-1\}$, $\lambda_A\, e^{2ik\pi/d}$ est une valeur propre de A.

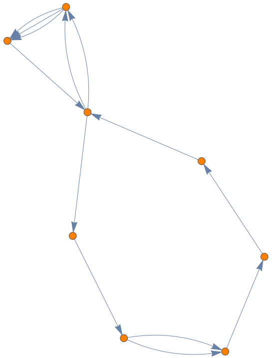
$\boxed{\text{L'entier } d \text{ dans le thm. de P.–F. est exactement la période du graphe.}}$

$$\lambda_A = 2.10938,\ \underbrace{-2.10938}_{e^{i\pi}\lambda_A},\ 0.67044i,\ -0.67044i,\ 0$$

Remarque

Si graphe f. connexe et période$=1$, alors graphe primitif.

Lien avec le théorème de Perron–Frobenius,

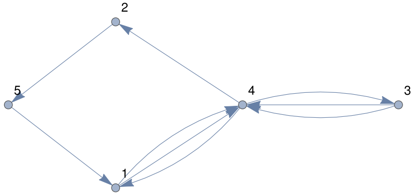


$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

période 3 et valeurs propres

$$-\sqrt[3]{\sqrt{11}-3},\ -e^{2i\pi/3}\sqrt[3]{\sqrt{11}-3},\ -e^{4i\pi/3}\sqrt[3]{\sqrt{11}-3},$$
$$\underbrace{\sqrt[3]{3+\sqrt{11}}}_{\lambda_A},\ e^{2i\pi/3}\sqrt[3]{3+\sqrt{11}},\ e^{4i\pi/3}\sqrt[3]{3+\sqrt{11}},\ 0,\ 0,$$

Si on veut tout de même appliquer le théorème de Perron...

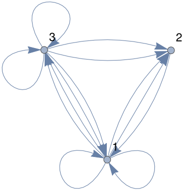


On va élever A à la puissance d (la période)

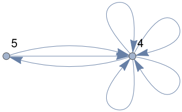
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Cela revient à prendre les chemins de longueur d comme nouvelles « arêtes ».

On obtient (graphe dont la matrice d'adjacence est A^2)



$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$



Graphe construit sur les sommets de départ, nombre de composantes connexes $= d$. Chaque composante est primitive (on a divisé la période par d, donc « nouvelle » période 1).

Algorithme du PageRank

Proposition

Soit $G = (V, E)$ un multi-graphe non orienté k-régulier. Alors

- k est une valeur propre de G,
- pour toute valeur propre λ de G, on a $|\lambda| \leq k$,
- si G est connexe, k est valeur propre simple
(i.e., les multiplicités géométrique et algébrique valent 1).

Remarque

Proposition OK dans le cas orienté.
Remplacer "connexe" par f. connexe.

1. $(1, \ldots, 1)^{\sim}$ est un vecteur propre de $A(G)$ de valeur propre k.

2. considérons une valeur propre λ de $A(G)$ ayant $y \neq 0$ comme vecteur propre.

Soit y_j une composante de y de module maximum

$$|\lambda|\,|y_j| = |[A(G)y]_j| \leq \sum_{i=1}^{n} [A(G)]_{j,i}|y_i| \leq |y_j| \sum_{i=1}^{n} [A(G)]_{j,i} = k\,|y_j|$$

donc $|\lambda| \leq k$.

3. G est connexe, $A(G)$ est irréductible.
Par le thm. de Perron–Frobenius, la matrice $A(G)$ possède une unique valeur propre réelle dominante et vu 2, il s'agit de k.

Une matrice $M \geq 0$ est stochastique,
si la somme des éléments de chaque ligne vaut 1.

Corollaire

Si $M \in \mathbb{Q}_r^r$ est une matrice stochastique,
alors 1 est valeur propre dominante de M.

Soit $M \in \mathbb{Q}_r^r$. En multipliant tous les éléments de M par le p.p.c.m. γ des dénominateurs des éléments de M, la matrice

$$M' = \gamma\, M$$

est telle que la somme des éléments de chaque ligne vaut $\gamma \in \mathbb{N}$.

Il s'agit donc de la matrice d'adjacence d'un digraphe γ-régulier.
Vu la prop. précédente, $\gamma\, M$ possède γ comme valeur propre dominante (i.e., toute autre valeur propre μ est telle que $|\mu| \leq \gamma$).

La conclusion suit en divisant par γ.

Google attribue à chaque page une mesure (un réel), appelée "PageRank", destinée à déterminer si elles font ou non autorité.

Lorsqu'on effectue une recherche sur un mot clé donné, Google extrait les pages contenant ce mot clé et les classe en se basant sur ce PageRank.

On voudrait implémenter deux règles simples :

- on accorde plus d'importance, i.e., un score de "PageRank" plus élevé, aux *pages référencées par des pages qui font elles-mêmes autorité* , càd dont le PageRank est élevé ;
- on accorde d'autant moins de crédit à un lien, si il provient d'une *page qui dispose de nombreux liens*.

Le PageRank $\pi_j \geq 0$ de la page $j \in \{1, \ldots, n\}$ serait donné par

$$\pi_j = \sum_{i \in \mathrm{pred}(j)} \frac{\pi_i}{d^+(i)} \tag{1}$$

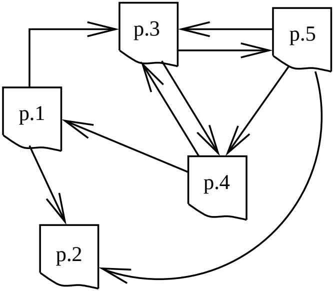
formule récursive, on ne dispose pas *a priori* de méthode assurant

- l'existence,
- l'unicité,
- le calcul efficace

d'une solution $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ non triviale.

On peut supposer que les scores recherchés sont *normalisés*,

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1.$$



$$\begin{pmatrix}\pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \pi_4 & \pi_5\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \pi_4 & \pi_5\end{pmatrix}$$

Remarque

La matrice n'est ni primitive, ni irréductible.
On cherche un vecteur propre de valeur propre 1.

$$\begin{pmatrix}\pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \pi_4 & \pi_5\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \pi_4 & \pi_5\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \pi_1 = \pi_4/2 \\ \pi_2 = \pi_1/2 + \pi_5/3 \\ \pi_3 = \pi_1/2 + \pi_4/2 + \pi_5/3 \\ \pi_4 = \pi_3/2 + \pi_5/3 \\ \pi_5 = \pi_3/2 \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1.$$

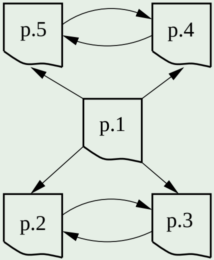
Continuons l'exemple...

$$\begin{cases} \pi_1 = \pi_4/2 \\ \pi_2 = \pi_1/2 + \pi_5/3 \\ \pi_3 = \pi_1/2 + \pi_4/2 + \pi_5/3 \\ \pi_4 = \pi_3/2 + \pi_5/3 \\ \pi_5 = \pi_3/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi_1 = \pi_4/2 \\ \pi_5 = \pi_3/2 \\ \pi_2 = \pi_4/4 + \pi_3/6 \\ \pi_3 = \pi_4/4 + \pi_4/2 + \pi_3/6 \\ \pi_4 = \pi_3/2 + \pi_3/6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi_4 = 10\pi_3/9 \\ \pi_4 = 6\pi_3/9 \end{cases}$$

La seule solution est $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \pi_4 = \pi_5 = 0$.

Un second exemple...



$$\begin{cases} \pi_2 = \pi_1/4 + \pi_3 \\ \pi_3 = \pi_1/4 + \pi_2 \\ \pi_4 = \pi_1/4 + \pi_5 \\ \pi_5 = \pi_1/4 + \pi_4. \end{cases}$$

on trouve par exemple,

- $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = 0$, $\pi_4 = \pi_5 = 1/2$ ou bien,
- $\pi_1 = \pi_4 = \pi_5 = 0$, $\pi_2 = \pi_3 = 1/2$.

Rappel : modèle proposé

$$\pi_j = \sum_{i \in \mathrm{pred}(j)} \frac{\pi_i}{d^+(i)}$$

Réécriture matricielle ("H" comme "hyperlien"),

$$\pi = \pi\, H \tag{2}$$

où

$$H_{ij} = \begin{cases} A(G)_{ij} / d^+(i) & \text{si } d^+(i) > 0 \\ 0 & \text{si } d^+(i) = 0 \end{cases}$$

avec $A(G)$ la matrice d'adjacence du graphe G

Remarque

La matrice H est stochastique (sauf pour les lignes de 0).

Au vu des deux exemples

On ne peut *a priori*

- ni garantir l'existence d'une solution $\neq 0$ **:-(**
- ni garantir l'unicité de la solution **:-(**

Solution de S. Brin, L. Page

$\rightarrow$ Perturber légèrement le modèle initial

pour obtenir un système "proche" mais avec de "belles" propriétés

$\rightsquigarrow$ pouvoir appliquer le thm. de Perron.

On pertube le modèle

1. Pour se débarrasser des "puits", i.e., des pages ne pointant vers aucune autre page et pour obtenir une matrice stochastique, on introduit une matrice S ("S" comme "stochastique") définie par

$$S_{ij} = \begin{cases} A(G)_{ij}/d^+(i) & \text{si } d^+(i) > 0 \\ 1/n & \text{si } d^+(i) = 0. \end{cases}$$

2. Pour assurer la forte connexité du graphe, on construit une matrice G ("G" comme Google) donnée par la combinaison affine (et même convexe) suivante avec un réel $\alpha \in [0,1]$ fixé

$$G = \alpha\, S + (1-\alpha)\, J/n$$

où $J = (1)_{1 \leq i,j \leq n}$.
L'équation initiale (2) est remplacée par

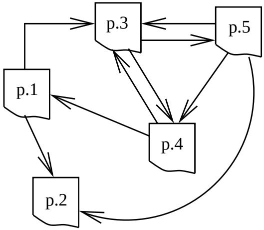
$$\boxed{\pi = \pi\, G.}$$

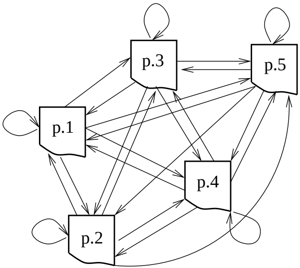
(La matrice J/n est parfois appelée *matrice de téléportation*)

$$G = \alpha\, S + (1-\alpha)\, J/n$$

Remarque

G se trouve sur le segment $[S, J/n]$ dans l'espace des matrices.





$$\overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}}^{H}, \quad \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}}^{S}.$$

$$0,85.\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} + 0,15.\begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3/100 & 91/200 & 91/200 & 3/100 & 3/100 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 3/100 & 3/100 & 3/100 & 91/200 & 91/200 \\ 91/200 & 3/100 & 91/200 & 3/100 & 3/100 \\ 3/100 & 47/150 & 47/150 & 47/150 & 3/100 \end{pmatrix} = \mathbf{G}.$$

Choix heuristique de α

Google attribue à α une valeur de $0,85$. Ce choix n'est pas arbitraire.

Au plus α est proche de 1 :

- au mieux on approche le modèle “naturel” (2) proposé initialement
- on diminue le rôle artificiel de la matrice de téléportation.

Cependant, on peut montrer que ce paramètre α contrôle la vitesse de convergence de la méthode de calcul développée et donc le nombre d'itérations à effectuer pour obtenir une estimation de π.

Choix heuristique de α

Quand α tend vers 1, le nombre d'itérations devient prohibitif (cf. C. Meyer et A. Langville).

α	nombre d'itérations
$0,5$	34
$0,75$	81
$0,8$	104
$0,85$	142
$0,9$	219
$0,95$	449
$0,99$	2292
$0,999$	23015

Le modèle probabiliste du surfeur

un surfeur se trouvant sur une page quelconque a deux choix possibles :

- avec une probabilité α, il clique avec une probabilité uniforme sur l'un des liens de la page pour changer de page.
- Soit, avec une probabilité $1-\alpha$, il se déplace avec une probabilité uniforme sur l'une des n pages de l'Internet tout entier.

G_{ij} représente la probabilité de transition lorsque le surfeur se trouve sur la page i de passer à la page j.

$\rightsquigarrow$ G_{ij}^k représente la probabilité de transition lorsque le surfeur se trouve sur la page i de passer à la page j en k clics (chemins de longueur k).

Modèles initial et perturbé

Par rapport à l'équation initiale (1), l'emploi de la matrice G donne la formule suivante pour la détermination des "nouveaux" π_j qui seront effectivement calculés

$$\pi_j = \sum_{i=1}^{n} \pi_i \, \left(\alpha\, S_{ij} + (1-\alpha)\,\frac{1}{n}\right)$$

$$= \alpha \underbrace{\sum_{i \in \mathrm{pred}(j)} \frac{\pi_i}{d^+(i)}}_{\text{modèle initial}} + \frac{1}{n}\left(1 - \alpha + \alpha \sum_{i : d^+(i) = 0} \pi_i\right).$$

Les matrices S, J/n et G sont stochastiques,
$\rightsquigarrow 1$ est valeur propre dominante de G (corollaire).

Par construction, la matrice G est primitive car $G > 0$.

On peut appliquer le théorème de Perron, la valeur propre dominante 1 est simple et il existe un unique vecteur colonne $x > 0$ (resp. ligne $y > 0$) tel que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \text{ (resp. } \sum_{i=1}^{n} y_i = 1) \quad \text{et} \quad Gx = x \text{ (resp. } yG = y).$$

Remarque

valeur propre simple $\rightsquigarrow$ unicité de la solution "normalisée"

Conclusion

Déterminer le vecteur des “PageRanks” π revient à chercher le vecteur propre y de Perron à gauche (normalisé) de G.

En appliquant le résultat asymptotique (A primitive)

$$\boxed{A^k = \lambda_A^k \, v_A \, \widetilde{w_A} + o(\lambda_A^k), \quad \widetilde{w_A} v_A = 1}$$

e joue le rôle de v_A, π celui de w_A :

- $e = (1 \cdots 1)\tilde{}$ est un vecteur propre à droite de G de valeur propre 1 (G est stochastique)
- π est un vecteur propre à gauche de G de valeur propre 1
- $\pi e = 1$ (scores sont normalisés)

$$G^k = e\pi + o(1) \text{ i.e., } \lim_{k\to\infty} G^k = e\pi = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_1 & \cdots & \pi_n \end{pmatrix}.$$

Méthode itérative pour estimer π

Soit

$$p^{(0)} = \begin{pmatrix} p_1^{(0)} & \cdots & p_n^{(0)} \end{pmatrix} > 0 \text{ vecteur t.q. } \sum_i p_i^{(0)} = 1.$$

$\forall k \geq 1$, on pose $p^{(k)} = p^{(0)} G^k = p^{(k-1)} G$.

Thèse : Montrer que

$$\lim_{k \to \infty} p^{(k)} = \pi$$

$\rightsquigarrow$ il suffira de

- partir d'une distribution initiale, e.g. $\begin{pmatrix} 1/n & \cdots & 1/n \end{pmatrix}$
- d'appliquer G de manière itérative
- jusqu'à la précision voulue mesurée par $||p^{(k)} - p^{(k-1)}||$

Méthode itérative pour estimer π

Thèse : $\lim_{k\to\infty} p^{(k)} = \pi$

$$\lim_{k\to\infty} G^k = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_1 & \cdots & \pi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_n \end{pmatrix} =: P$$

et

$$[p^{(0)}P]_j = \sum_{i=1}^{n} p_i^{(0)} \pi_j = \pi_j \underbrace{\sum_{i=1}^{n} p_i^{(0)}}_{=1} = \pi_j .$$

Application du classement – Division 1 (2009–2010)

A bat B deux fois : $A \xleftarrow{6} B$
A bat B une fois et un nul : $A \xleftarrow{4} B$ et $A \xrightarrow{1} B$
A/B une victoire/une défaite : $A \xleftarrow{3} B$ et $A \xrightarrow{3} B$
A et B font deux nuls : $A \xleftarrow{2} B$ et $A \xrightarrow{2} B$
A perd une fois contre B et un nul : $A \xleftarrow{1} B$ et $A \xrightarrow{4} B$
A perd deux fois contre B : $A \xrightarrow{6} B$

$$\begin{pmatrix} * & 6 \\ 0 & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & 4 \\ 1 & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & 2 \\ 2 & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & 3 \\ 3 & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & 1 \\ 4 & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & 0 \\ 6 & * \end{pmatrix}$$

Anderlecht, Cercle B., Club B., Charleroi, Courtrai, La Gantoise, Genk, Beerschot, Lokeren, Malines, Roulers, Saint-Trond, Standard, Westerlo, Zulte-W.

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & 0 & 0 \\
6 & 0 & 6 & 0 & 4 & 6 & 3 & 3 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 3 & 4 \\
3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 3 & 0 & 4 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\
6 & 6 & 6 & 0 & 4 & 6 & 3 & 1 & 3 & 6 & 0 & 2 & 4 & 4 & 2 \\
6 & 1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 3 & 6 & 2 & 3 \\
2 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 4 & 6 \\
6 & 3 & 1 & 3 & 4 & 4 & 0 & 4 & 0 & 6 & 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\
6 & 3 & 3 & 4 & 3 & 1 & 1 & 0 & 3 & 6 & 1 & 3 & 2 & 1 & 4 \\
6 & 4 & 6 & 3 & 4 & 6 & 6 & 3 & 0 & 3 & 3 & 6 & 6 & 3 & 4 \\
6 & 4 & 1 & 0 & 4 & 6 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 6 & 4 & 3 & 3 \\
6 & 3 & 6 & 6 & 6 & 6 & 2 & 4 & 3 & 6 & 0 & 6 & 3 & 2 & 1 \\
0 & 4 & 4 & 2 & 3 & 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 6 \\
4 & 4 & 3 & 1 & 0 & 6 & 3 & 2 & 0 & 1 & 3 & 4 & 0 & 3 & 2 \\
6 & 3 & 6 & 1 & 2 & 1 & 4 & 4 & 3 & 3 & 2 & 0 & 3 & 0 & 6 \\
6 & 1 & 4 & 2 & 3 & 0 & 2 & 1 & 1 & 3 & 4 & 0 & 2 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

$$H = S =$$

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{12} & 0 & 0 \\
\frac{1}{7} & 0 & \frac{1}{7} & 0 & \frac{2}{21} & \frac{1}{7} & \frac{1}{14} & \frac{1}{14} & \frac{1}{42} & \frac{1}{42} & \frac{1}{14} & \frac{1}{42} & \frac{1}{42} & \frac{1}{14} & \frac{2}{21} \\
\frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{21} & \frac{1}{21} & \frac{4}{21} & \frac{1}{7} & 0 & \frac{4}{21} & 0 & \frac{1}{21} & \frac{1}{7} & 0 & \frac{1}{21} \\
\frac{6}{53} & \frac{6}{53} & \frac{6}{53} & 0 & \frac{4}{53} & \frac{6}{53} & \frac{3}{53} & \frac{1}{53} & \frac{3}{53} & \frac{6}{53} & 0 & \frac{2}{53} & \frac{4}{53} & \frac{4}{53} & \frac{2}{53} \\
\frac{2}{11} & \frac{1}{33} & \frac{4}{33} & \frac{1}{33} & 0 & \frac{1}{33} & \frac{1}{33} & \frac{1}{11} & \frac{1}{33} & \frac{1}{33} & 0 & \frac{1}{11} & \frac{2}{11} & \frac{2}{33} & \frac{1}{11} \\
\frac{1}{14} & 0 & \frac{1}{7} & 0 & \frac{1}{7} & 0 & \frac{1}{28} & \frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{28} & 0 & \frac{1}{7} & \frac{3}{14} \\
\frac{3}{20} & \frac{3}{40} & \frac{1}{40} & \frac{3}{40} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{10} & 0 & \frac{3}{20} & \frac{1}{20} & \frac{1}{40} & \frac{3}{40} & \frac{1}{40} & \frac{1}{20} \\
\frac{6}{41} & \frac{3}{41} & \frac{3}{41} & \frac{4}{41} & \frac{3}{41} & \frac{1}{41} & \frac{1}{41} & 0 & \frac{3}{41} & \frac{6}{41} & \frac{1}{41} & \frac{3}{41} & \frac{2}{41} & \frac{1}{41} & \frac{4}{41} \\
\frac{2}{21} & \frac{4}{63} & \frac{2}{21} & \frac{1}{21} & \frac{4}{63} & \frac{2}{21} & \frac{2}{21} & \frac{1}{21} & 0 & \frac{1}{21} & \frac{1}{21} & \frac{2}{21} & \frac{2}{21} & \frac{1}{21} & \frac{4}{63} \\
\frac{3}{20} & \frac{1}{10} & \frac{1}{40} & 0 & \frac{1}{10} & \frac{3}{20} & 0 & 0 & \frac{3}{40} & 0 & 0 & \frac{3}{20} & \frac{1}{10} & \frac{3}{40} & \frac{3}{40} \\
\frac{1}{10} & \frac{1}{20} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{30} & \frac{1}{15} & \frac{1}{20} & \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{10} & \frac{1}{20} & \frac{1}{30} & \frac{1}{60} \\
0 & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{18} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{9} & \frac{1}{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{36} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\
\frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{12} & \frac{1}{36} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{18} & 0 & \frac{1}{36} & \frac{1}{12} & \frac{1}{9} & 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{18} \\
\frac{3}{22} & \frac{3}{44} & \frac{3}{22} & \frac{1}{44} & \frac{1}{22} & \frac{1}{44} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{3}{44} & \frac{3}{44} & \frac{1}{22} & 0 & \frac{3}{44} & 0 & \frac{3}{22} \\
\frac{6}{29} & \frac{1}{29} & \frac{4}{29} & \frac{2}{29} & \frac{3}{29} & 0 & \frac{2}{29} & \frac{1}{29} & \frac{1}{29} & \frac{3}{29} & \frac{4}{29} & 0 & \frac{2}{29} & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

$$G = 0.85H + 0.15J/15$$

$$\left(\begin{array}{cccccccccccccc}
.010 & .010 & .22 & .010 & .010 & .15 & .010 & .010 & .010 & .010 & .010 & .43 & .081 & .010 \\
.13 & .010 & .13 & .010 & .091 & .13 & .071 & .071 & .030 & .030 & .071 & .030 & .030 & .071 \\
.13 & .010 & .010 & .010 & .050 & .050 & .17 & .13 & .010 & .17 & .010 & .050 & .13 & .010 \\
.11 & .11 & .11 & .010 & .074 & .11 & .058 & .026 & .058 & .11 & .010 & .042 & .074 & .074 \\
.16 & .036 & .11 & .036 & .010 & .036 & .036 & .087 & .036 & .036 & .010 & .087 & .16 & .062 \\
.071 & .010 & .13 & .010 & .13 & .010 & .040 & .13 & .010 & .010 & .010 & .10 & .010 & .13 \\
.14 & .074 & .031 & .074 & .095 & .095 & .010 & .095 & .010 & .14 & .052 & .031 & .074 & .031 \\
.13 & .072 & .072 & .093 & .072 & .031 & .031 & .010 & .072 & .13 & .031 & .072 & .051 & .031 \\
.091 & .064 & .091 & .050 & .064 & .091 & .091 & .050 & .010 & .050 & .050 & .091 & .091 & .050 \\
.14 & .095 & .031 & .010 & .095 & .14 & .010 & .010 & .074 & .010 & .010 & .14 & .095 & .074 \\
.095 & .052 & .095 & .095 & .095 & .095 & .038 & .067 & .052 & .095 & .010 & .095 & .052 & .038 \\
.010 & .10 & .10 & .057 & .081 & .081 & .10 & .081 & .010 & .010 & .010 & .010 & .034 & .15 \\
.10 & .10 & .081 & .034 & .010 & .15 & .081 & .057 & .010 & .034 & .081 & .10 & .010 & .081 \\
.13 & .068 & .13 & .029 & .049 & .029 & .087 & .087 & .068 & .068 & .049 & .010 & .068 & .010 \\
.19 & .039 & .13 & .069 & .098 & .010 & .069 & .039 & .039 & .098 & .13 & .010 & .069 & .010
\end{array}\right.$$

Recherche d'un vecteur propre de valeur propre 1 (normalisé)

Anderlecht	0.103846
Cercle B.	0.0534133
Club B.	0.100507
Charleroi	0.0372727
Courtrai	0.0658507
La Gantoise	0.0788262
Genk	0.0632727
Beerschot	0.0661352
Lokeren	0.0298245
Malines	0.0647883
Roulers	0.0346681
Saint-Trond	0.09839
Standard	0.069503
Westerlo	0.0564951
Zulte	0.0772071

On ordonne :

	PageRank	classement	par points
0.103846	Anderlecht	Anderlecht	69
0.100507	Club B.	Club B.	57
0.09839	Saint-Trond	La Gantoise	49
0.0788262	La Gantoise	Courtrai	45
0.0772071	Zulte-W.	Saint-Trond	42
0.069503	Standard	Zulte-W.	41
0.0661352	Beerschot	Malines	39
0.0658507	Courtrai	Standard	39
0.0647883	Malines	Cercle B.	38
0.0632727	Genk	Beerschot	35
0.0564951	Westerlo	Genk	34
0.0534133	Cercle B.	Westerlo	32
0.0372727	Charleroi	Charleroi	23
0.0346681	Roulers	Lokeren	18
0.0298245	Lokeren	Roulers	18