Introduction aux mathématiques discrètes (3)

Michel Rigo

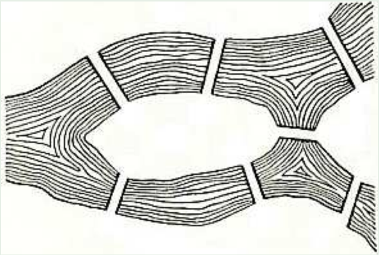
http://www.discmath.ulg.ac.be/

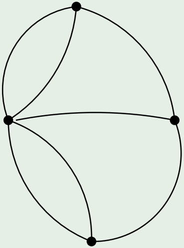
Année 2018–2019

L'ARCHI-CLASSIQUE

LES SEPT PONTS DE KÖNIGSBERG / CIRCUIT EULÉRIEN

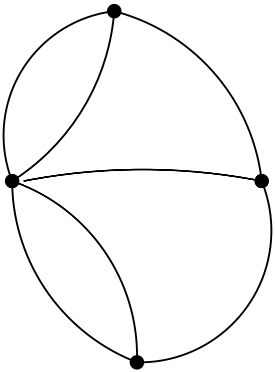
Actuel Kaliningrad, ville de Russie proche de la Lituanie et de la Pologne où coule la rivière Pregel



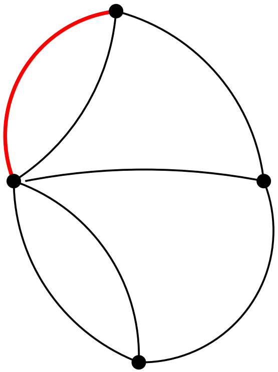


déterminer pour un multi-graphe donné (éventuellement orienté) s'il existe un circuit, i.e., un chemin fermé, passant une et une seule fois par chaque arête.

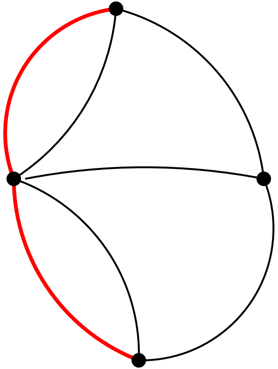
Partons du sommet 'en haut', est-ce que l'on s'y prend mal ?



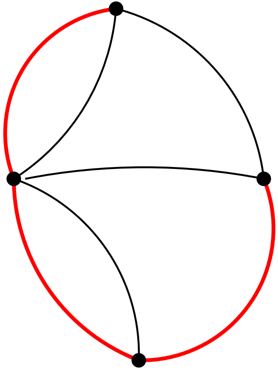
Partons du sommet 'en haut', est-ce que l'on s'y prend mal ?



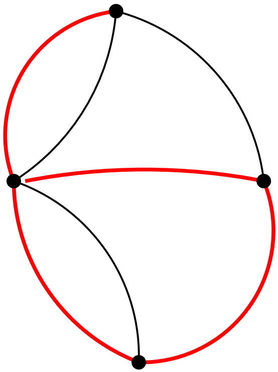
Partons du sommet 'en haut', est-ce que l'on s'y prend mal ?



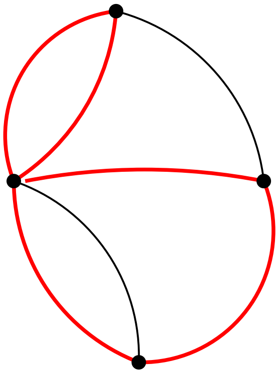
Partons du sommet 'en haut', est-ce que l'on s'y prend mal ?



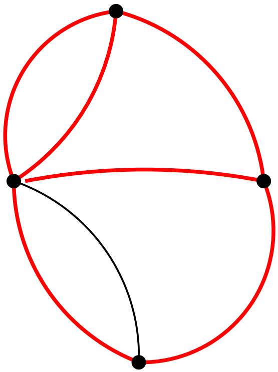
Partons du sommet 'en haut', est-ce que l'on s'y prend mal ?



Partons du sommet 'en haut', est-ce que l'on s'y prend mal ?

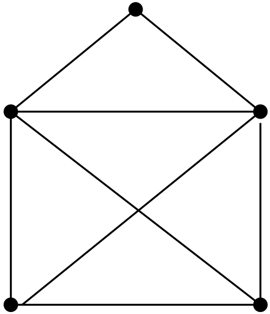


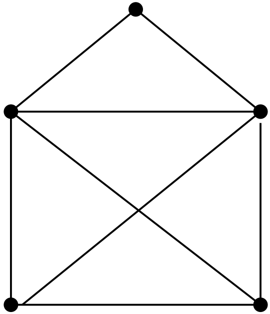
Partons du sommet 'en haut', est-ce que l'on s'y prend mal ?



Circuit eulérien VS chemin eulérien

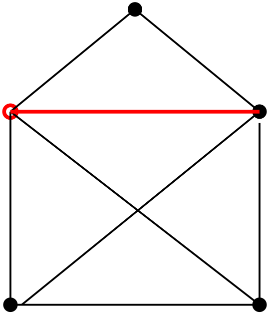
Chemin eulérien ? Tracer d'un trait...

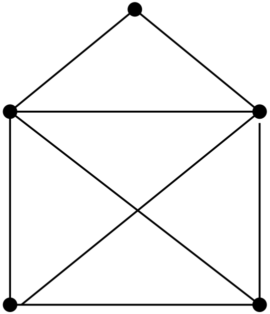




Circuit eulérien VS chemin eulérien

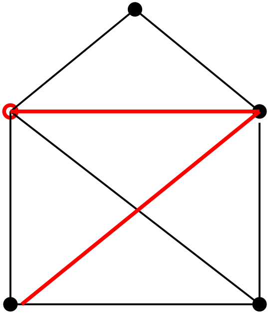
Chemin eulérien ? Tracer d'un trait...

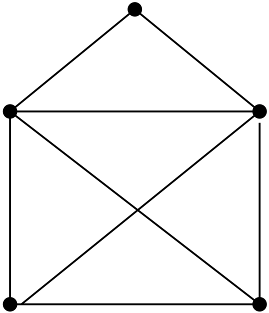




Circuit eulérien VS chemin eulérien

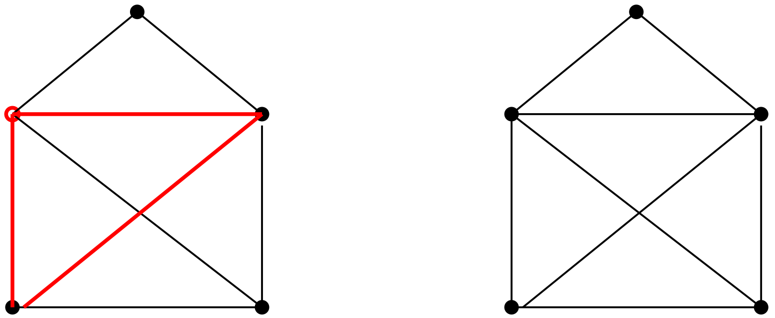
Chemin eulérien ? Tracer d'un trait...





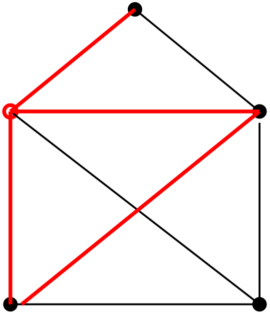
Circuit eulérien VS chemin eulérien

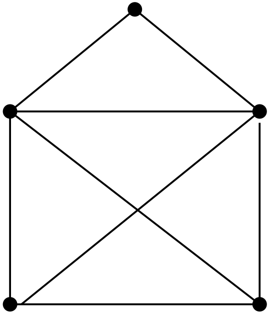
Chemin eulérien ? Tracer d'un trait...



Circuit eulérien VS chemin eulérien

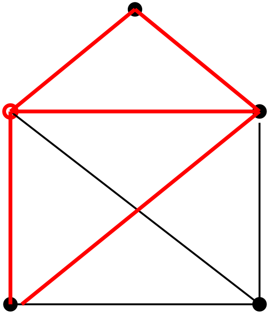
Chemin eulérien ? Tracer d'un trait...

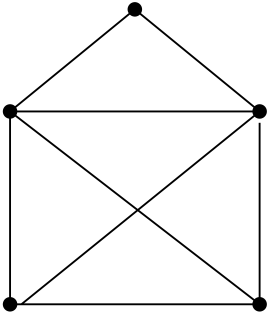




Circuit eulérien VS chemin eulérien

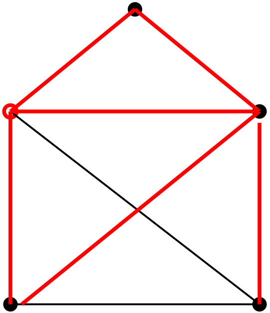
Chemin eulérien ? Tracer d'un trait. . .

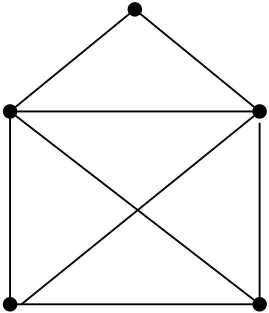




Circuit eulérien VS chemin eulérien

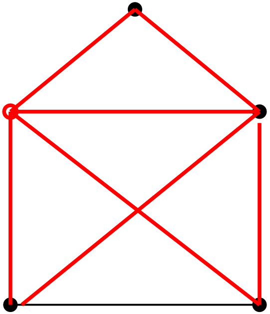
Chemin eulérien ? Tracer d'un trait...

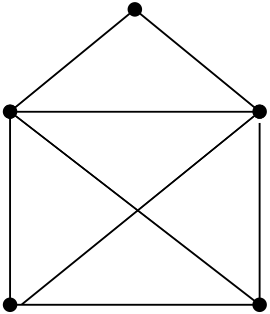




Circuit eulérien VS chemin eulérien

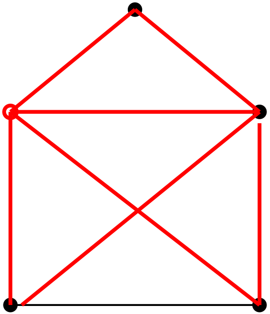
Chemin eulérien ? Tracer d'un trait. . .

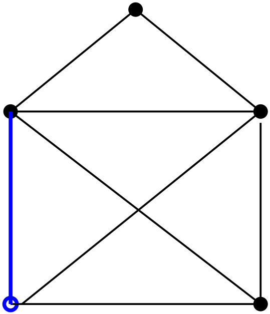




Circuit eulérien VS chemin eulérien

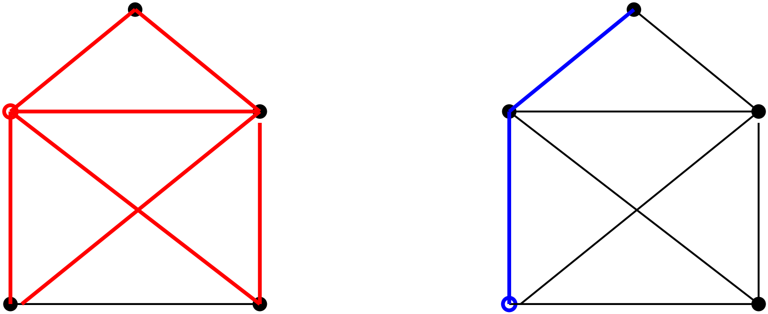
Chemin eulérien ? Tracer d'un trait. . .





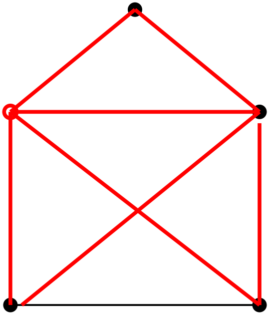
Circuit eulérien VS chemin eulérien

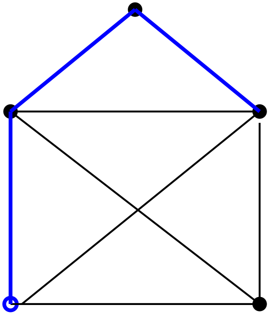
Chemin eulérien ? Tracer d'un trait. . .



Circuit eulérien VS chemin eulérien

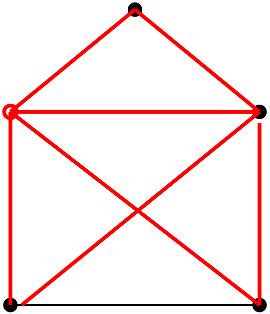
Chemin eulérien ? Tracer d'un trait. . .

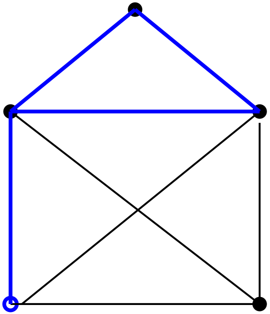




Circuit eulérien VS chemin eulérien

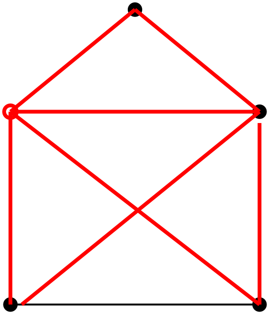
Chemin eulérien ? Tracer d'un trait. . .

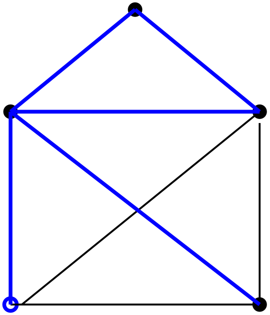




Circuit eulérien VS chemin eulérien

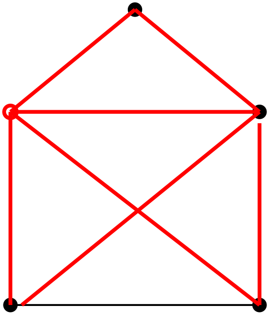
Chemin eulérien ? Tracer d'un trait. . .

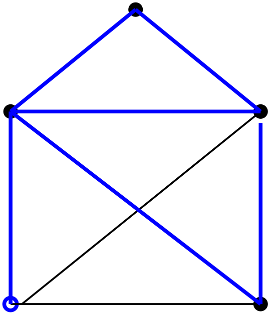




Circuit eulérien VS chemin eulérien

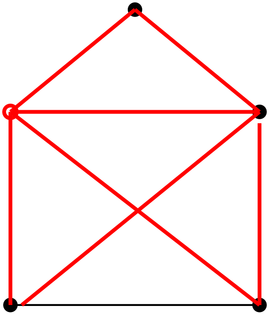
Chemin eulérien ? Tracer d'un trait...

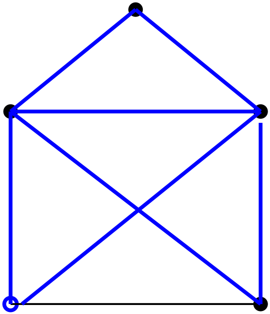




Circuit eulérien VS chemin eulérien

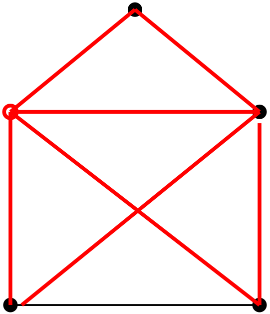
Chemin eulérien ? Tracer d'un trait...

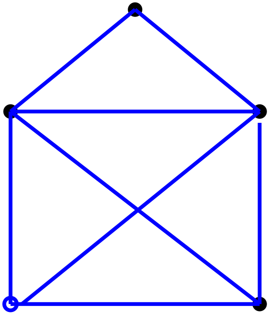




Circuit eulérien VS chemin eulérien

Chemin eulérien ? Tracer d'un trait...





Graphes eulériens


Leonhard Euler (1707 – 1783)

Graphes eulériens

Définitions valides dans le cas orienté ou non,
graphe ou multigraphe :

Un circuit eulérien est un circuit passant une et une seule fois par chaque arc/arête du graphe.

Un graphe eulérien est un graphe possédant un circuit eulérien.

Un chemin eulérien est un chemin passant une et une seule fois par chaque arête du graphe.

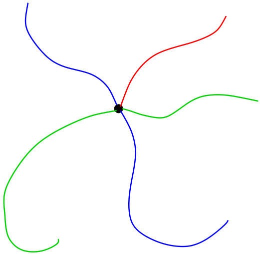
Graphes eulériens

⚠ On suppose avoir un graphe connexe (pas de sommets isolés).

Condition nécessaire

Pour que G soit eulérien, i.e. possède un circuit eulérien,
il est nécessaire que

- le degré de chaque sommet soit pair (cas non orienté)
- $d^-(v) = d^+(v)$ pour tout sommet v (cas orienté)



Graphes eulériens

Condition suffisante (propriété locale)

Théorème

Un multi-graphe fini non orienté connexe $G = (V, E)$ possède un circuit eulérien SSI le degré de chaque sommet est pair.

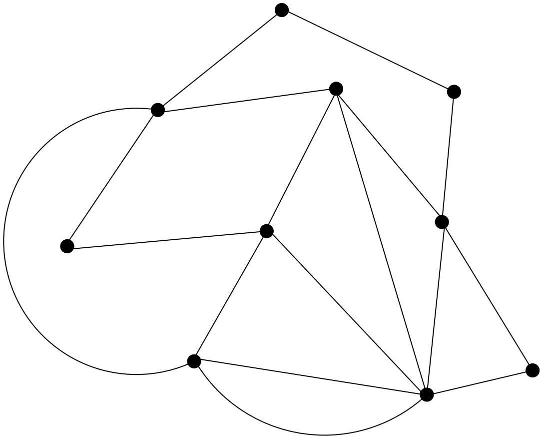
$\Rightarrow$ Hyp. : chaque sommet est de degré pair.

Construction d'une piste à partir d'un sommet a_1 de G.
A chaque étape $i \geq 1$, choix d'un sommet a_{i+1} t.q. une arête $\{a_i, a_{i+1}\} \in E$ est sélectionnée parmi les $\#E - i + 1$ arêtes non déjà sélectionnées.

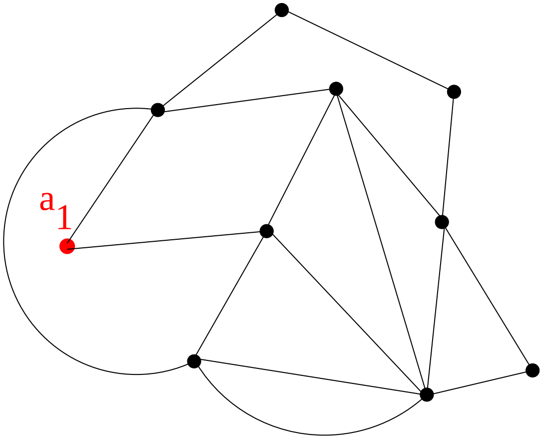
• sélection toujours possible : chaque sommet est de degré pair, "*lorsqu'on aboutit dans un sommet, on peut toujours en repartir*".

• la procédure s'achève : le graphe est fini.

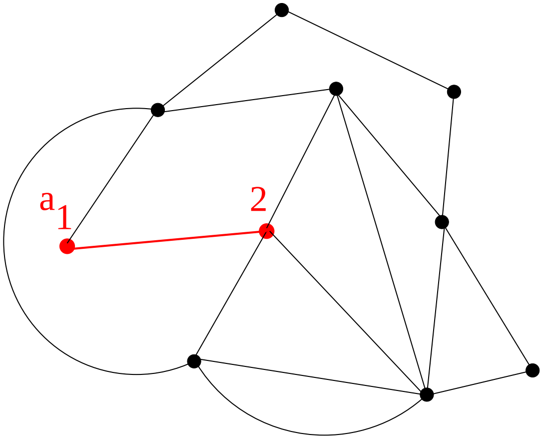
Graphes eulériens



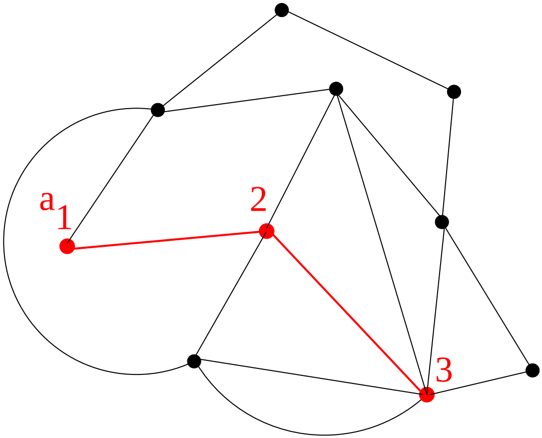
Graphes eulériens



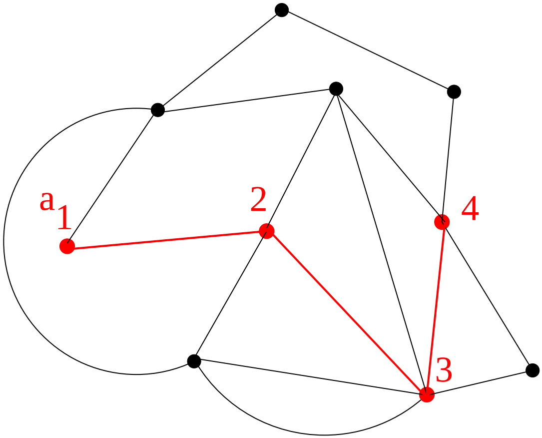
Graphes eulériens



Graphes eulériens



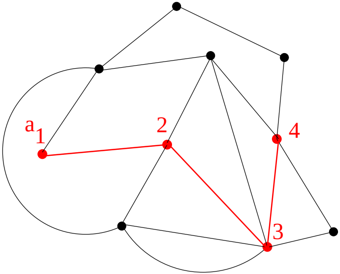
Graphes eulériens



On dispose d'une piste P joignant a_1 à un certain a_ℓ.

On peut supposer que cette piste est fermée, i.e., $a_\ell = a_1$.

Si a_ℓ diffère de a_1, puisque le degré de chaque sommet est pair, on peut étendre la piste en ajoutant une arête $\{a_\ell, a_{\ell+1}\}$. En continuant de la sorte, on épuise les sommets jusqu'à revenir en a_1.



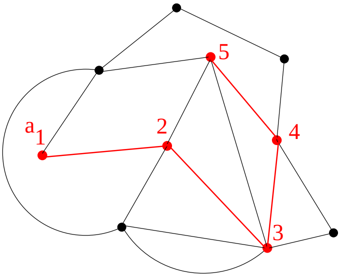
Si la piste fermée P est un circuit eulérien, le théorème est démontré.

Graphes eulériens

On dispose d'une piste P joignant a_1 à un certain a_ℓ.

On peut supposer que cette piste est fermée, i.e., $a_\ell = a_1$.

Si a_ℓ diffère de a_1, puisque le degré de chaque sommet est pair, on peut étendre la piste en ajoutant une arête $\{a_\ell, a_{\ell+1}\}$. En continuant de la sorte, on épuise les sommets jusqu'à revenir en a_1.



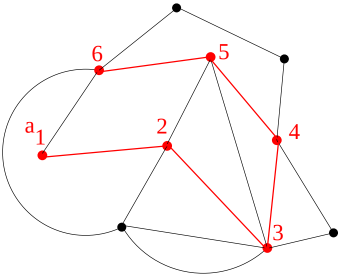
Si la piste fermée P est un circuit eulérien, le théorème est démontré.

Graphes eulériens

On dispose d'une piste P joignant a_1 à un certain a_ℓ.

On peut supposer que cette piste est fermée, i.e., $a_\ell = a_1$.

Si a_ℓ diffère de a_1, puisque le degré de chaque sommet est pair, on peut étendre la piste en ajoutant une arête $\{a_\ell, a_{\ell+1}\}$. En continuant de la sorte, on épuise les sommets jusqu'à revenir en a_1.



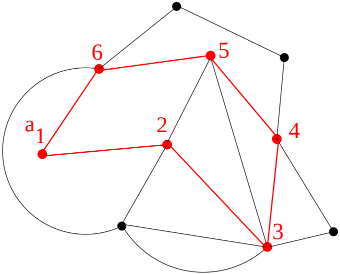
Si la piste fermée P est un circuit eulérien, le théorème est démontré.

Graphes eulériens

On dispose d'une piste P joignant a_1 à un certain a_ℓ.

On peut supposer que cette piste est fermée, i.e., $a_\ell = a_1$.

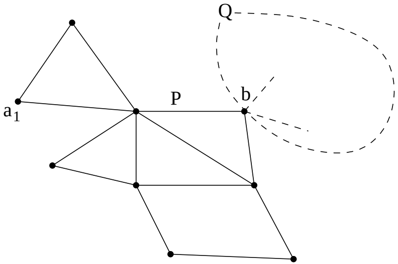
Si a_ℓ diffère de a_1, puisque le degré de chaque sommet est pair, on peut étendre la piste en ajoutant une arête $\{a_\ell, a_{\ell+1}\}$. En continuant de la sorte, on épuise les sommets jusqu'à revenir en a_1.



Si la piste fermée P est un circuit eulérien, le théorème est démontré.

Graphes eulériens

Sinon, il existe un sommet b de P qui est l'extrémité d'un nombre pair d'arêtes n'apparaissant pas dans P.

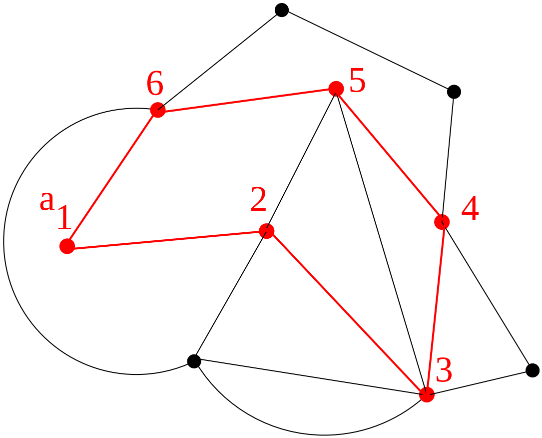


Depuis b, il est possible de construire une piste fermée Q formée uniquement d'arêtes n'apparaissant pas dans P. (même procédure, le degré de chaque sommet est encore pair.)

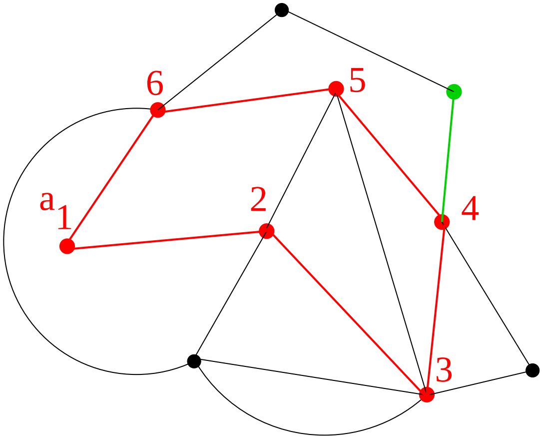
$\rightarrow$ on étend la piste P en une piste plus longue $P \cup Q$

$\rightarrow$ répéter cette étape un nombre fini de fois.

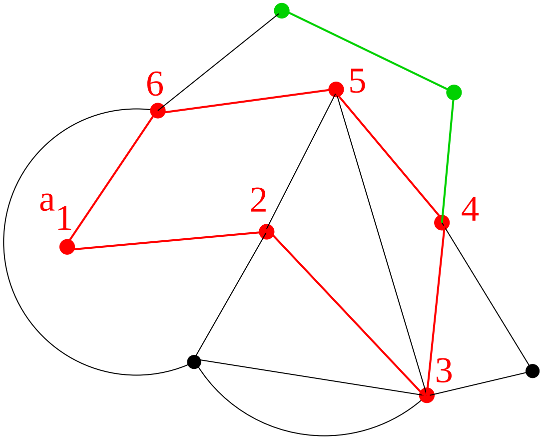
Graphes eulériens



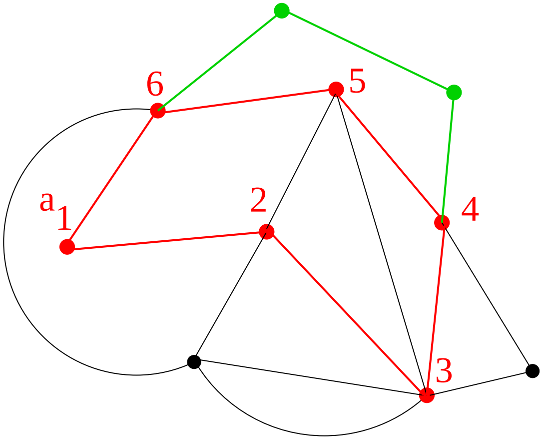
Graphes eulériens



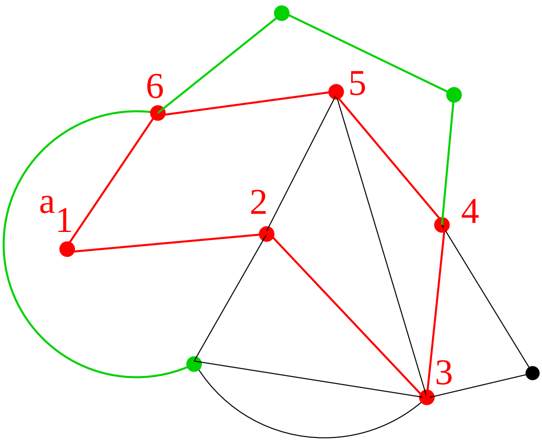
Graphes eulériens



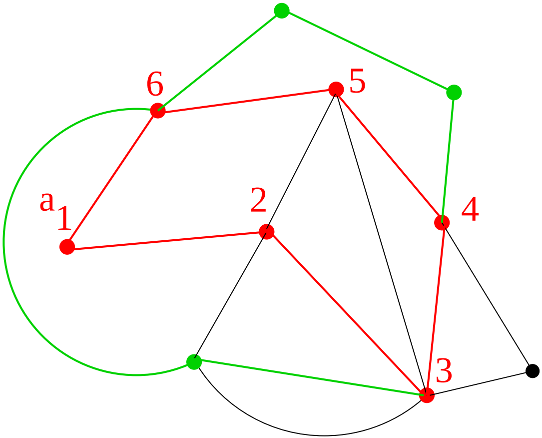
Graphes eulériens



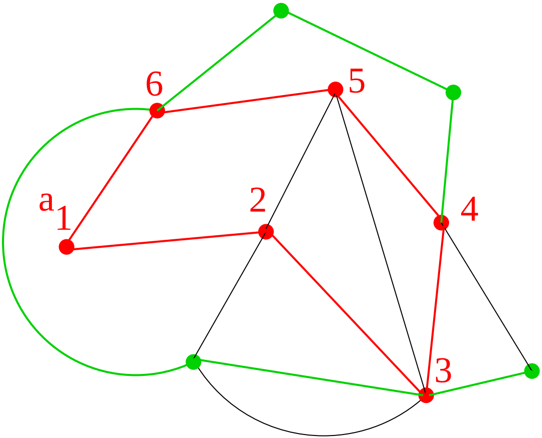
Graphes eulériens



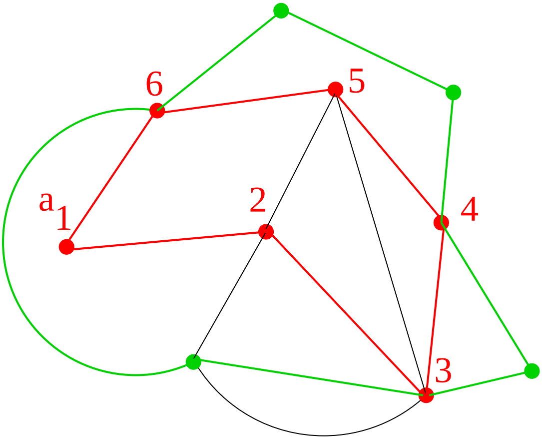
Graphes eulériens



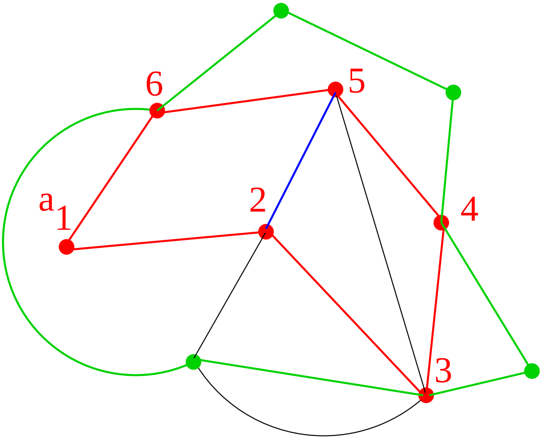
Graphes eulériens



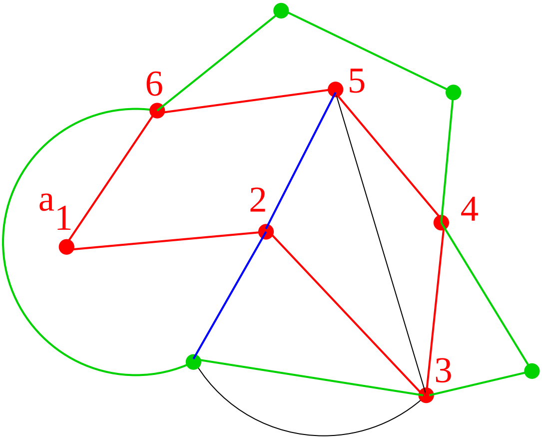
Graphes eulériens



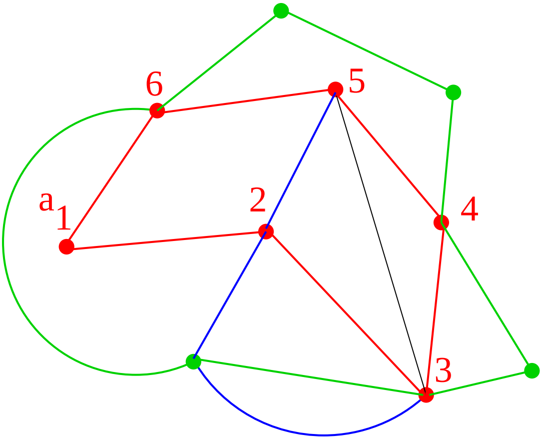
Graphes eulériens



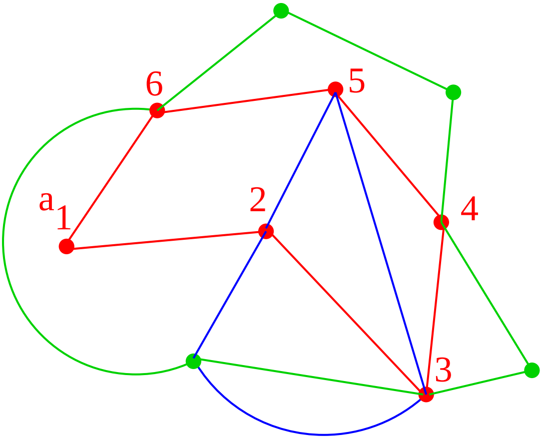
Graphes eulériens



Graphes eulériens



Graphes eulériens



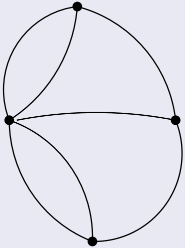
Graphes eulériens

Remarque : tester si un graphe donné est eulérien, est un problème polynomial *par rapport à la taille de l'instance*

$\leadsto$ problème de décision $\in \mathcal{P}$

Corollaire

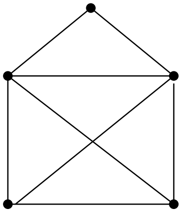
Le problème des sept ponts de Königsberg n'admet pas de solution.



Graphes eulériens

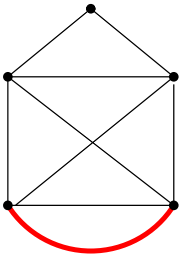
Corollaire

Un multi-graphe non orienté connexe possède un chemin eulérien joignant deux sommets a et b SSI a et b sont les deux seuls sommets de degré impair.



Corollaire

Un multi-graphe non orienté connexe possède un chemin eulérien joignant deux sommets a et b SSI a et b sont les deux seuls sommets de degré impair.



Graphes eulériens

Théorème

Un multi-graphe fini orienté s. connexe $G = (V, E)$ possède un circuit eulérien SSI $\forall v \in V$, $d^+(v) = d^-(v)$.

Corollaire

Un multi-graphe fini orienté s. connexe $G = (V, E)$ possède un chemin eulérien SSI il existe deux sommets v_0 et v_1 tel que

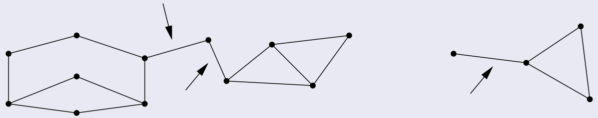
- pour tout $v \in V \setminus \{v_0, v_1\}$, $d^-(v) = d^+(v)$,
- $d^+(v_0) = d^-(v_0) + 1$,
- $d^-(v_1) = d^+(v_1) + 1$.

Algorithme alternatif pour rechercher un circuit eulérien

Définition

Soit $G = (V, E)$ un multi-graphe non orienté connexe (ou une composante connexe d'un multi-graphe non orienté).

e est une arête de coupure si $G - e$ n'est plus connexe.



Algorithme de Fleury (1883) – peu efficace

Choisir un sommet $v_0 \in V$
i:=1
Répéter tant que possible
   Choisir une arête $e_i = \{v_{i-1}, v_i\} \in V$ telle que
   - $e_i \neq$ arêtes déjà choisies $e_1, \ldots, e_{i-1}$
   - autant que possible, e_i ne doit pas être une arête de coupure de $G_i = G - \{e_1, \ldots, e_{i-1}\}$

   i:=$i + 1$

Cet algorithme fournit une suite d'arêtes $e_1, e_2, \ldots$.

Graphes hamiltoniens

Sir William Hamilton (1805–1865)

Analogie avec les graphes eulériens passant par chaque arête :

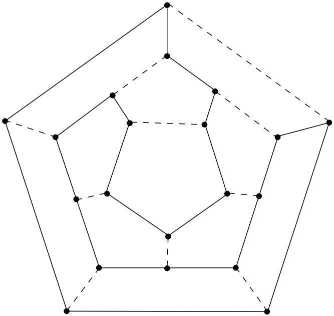
DÉFINITION

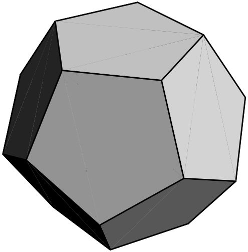
Un chemin (resp. circuit) hamiltonien de G : passe une et une seule fois par chaque sommet de G.

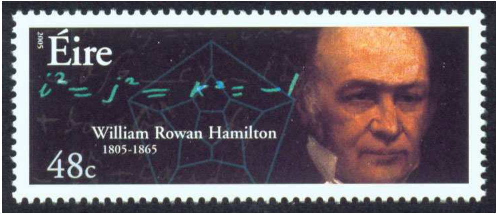
Un graphe hamiltonien : graphe possédant un circuit hamiltonien.

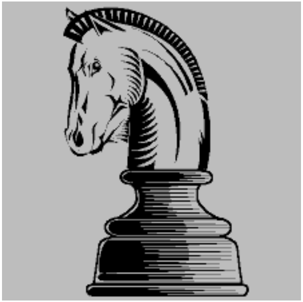
- En général, on se pose la question pour les graphes ayant au moins 3 sommets.
- Inutile de considérer des multigraphes $\rightsquigarrow$ graphes simples.
- Un arbre ayant au moins 3 sommets n'est jamais hamiltonien.

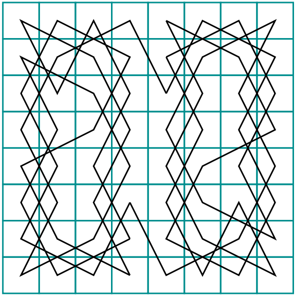
⚠ On considère ici des graphes simples et non orientés.






2005
Éire
$i^2 = j^2 = k^2 = -1$
William Rowan Hamilton
1805-1865
48c





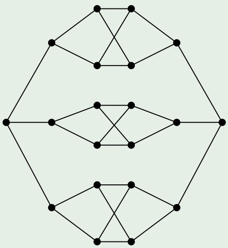
Une condition nécessaire pour qu'un graphe soit hamiltonien.

Proposition

Soit $G = (V, E)$ est un graphe hamiltonien.
Pour tout ensemble non vide $S \subseteq V$,
le nombre de composantes connexes de $G - S$ est $\leq \#S$.

Exemple

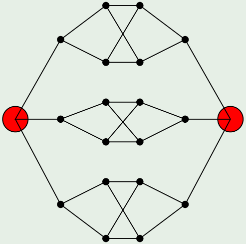
Ce graphe est-il hamiltonien ?



Le nombre de composantes connexes de $G - S$ est $> \#S$,
donc le graphe n'est pas hamiltonien (contraposée).

Exemple

Ce graphe est-il hamiltonien ?

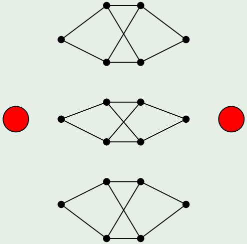


$\#S = 2$

Le nombre de composantes connexes de $G - S$ est $> \#S$, donc le graphe n'est pas hamiltonien (contraposée).

Exemple

Ce graphe est-il hamiltonien ?



$\#S = 2$

Preuve :

- Par hypothèse, on dispose d'un circuit hamiltonien.
- Si on enlève un sommet à un circuit, il reste connexe.
- Si on enlève deux sommets, on a au plus deux composantes connexes (on pourrait en garder une seule).
- $\ldots$
- Par récurrence, si on enlève k sommets, on a au plus k composantes connexes (sans même tenir compte des autres arêtes du graphe).

Remarque

Décider si un graphe donné est hamiltonien est un problème difficile (NP-complet). Méthode naïve : passer en revue les $n!$ permutations des sommets.

$\leadsto$ On dispose uniquement de conditions suffisantes assurant le caractère hamiltonien d'un graphe.

- Théorème de Dirac
- Théorème d'Ore $\leadsto$ fermeture d'un graphe
- Théorème de (Bondy–)Chvátal

Théorème de Dirac (1952)

Soit un graphe G (simple et non orienté) ayant $n \geq 3$ sommets.

Si le degré de chaque sommet est $\geq n/2$, G est hamiltonien.

Preuve du thm. de Dirac.

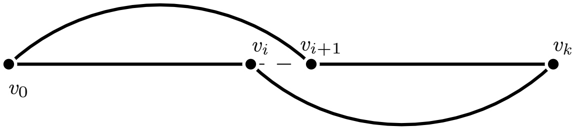
1) le graphe est connexe :
Sinon, on aurait au moins deux composantes connexes.
Donc, une des composantes a $\leq \lfloor n/2 \rfloor$ sommets.
Or, chaque sommet a $\geq \lceil n/2 \rceil$ voisins !

2) Soit $(v_0, \ldots, v_k)$ un chemin simple de longueur maximum k.

- $k < n$
- les voisins de v_0 sont tous dans $\{v_1, \ldots, v_k\}$
- les voisins de v_k sont tous dans $\{v_0, \ldots, v_{k-1}\}$

On va montrer qu'il existe $i < k$ tel que

$$\{v_0, v_{i+1}\} \in E \text{ et } \{v_i, v_k\} \in E$$



Par l'absurde :

- Soit $I \subseteq \{0, \ldots, k-1\}$ l'ensemble des indices i tels que $\{v_0, v_{i+1}\} \in E(G)$. Si $i \in I$, alors $\{v_i, v_k\} \notin E(G)$.
- Soit $J \subseteq \{0, \ldots, k-1\}$ l'ensemble des indices i tels que $\{v_i, v_k\} \in E(G)$. Si $i \in J$, alors $\{v_0, v_{i+1}\} \notin E(G)$.
- Par hypothèse, $\#I \geq n/2$ et $\#J \geq n/2$.
- $I \cap J = \emptyset$ donc $\#(I \cup J) \geq n$.
- Mais $I, J \subseteq \{0, \ldots, k-1\}$, donc $\#(I \cup J) \leq k < n$.

On a donc un circuit.

Le graphe est connexe. Si un sommet n'appartient pas au circuit, il existe un chemin de ce sommet vers le circuit (connexité).

$\rightsquigarrow$ on crée alors un chemin simple plus long que $(v_0, \ldots, v_k)$.

Théorème d'Ore (1960)

Soit un graphe G (simple et non orienté) ayant $n \geq 3$ sommets.

Si il existe 2 sommets x et y t.q. $\deg(x) + \deg(y) \geq n$.
Le graphe G est hamiltonien SSI $G + \{x, y\}$ l'est.

Définition de la fermeture $\mathcal{F}(G)$ d'un graphe G.

La fermeture d'un graphe simple et non orienté $G_0 = (V_0, E_0)$.
On définit une suite finie de graphes (simples)

$$G_0, G_1, \ldots, G_i = (V_i, E_i), \ldots, G_k$$

Pour tout i, on ajoute à G_i une arête comme suit :

$$G_{i+1} = G_i + \{u, v\}$$

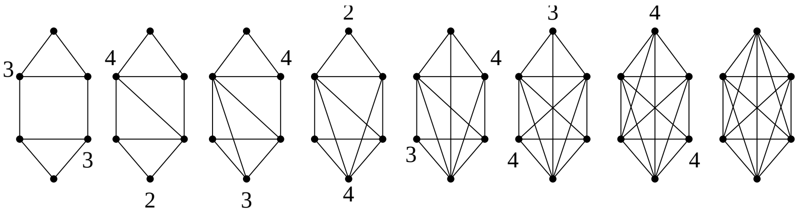
où u et v sont t.q. $\{u, v\} \notin E_i$ et

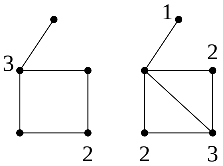
$$\deg_{G_i}(u) + \deg_{G_i}(v) \geq \# V$$

où $\deg_{G_i}$ désigne le degré d'un sommet dans le graphe G_i.

La procédure s'arrête à G_k si, pour tous sommets u, v,
soit $\{u, v\} \in E_k$, soit $\deg_{G_k}(u) + \deg_{G_k}(v) < \# V$.

La définition ne dépend PAS de l'ordre dans lequel les arêtes sont ajoutées.
On parle donc de LA fermeture $\mathcal{F}(G)$.





Corollaire

Soit un graphe G (simple et non orienté) ayant $n \geq 3$ sommets.

Le graphe G est hamiltonien SSI sa fermeture l'est.

Corollaire

Soit un graphe G (simple et non orienté) ayant $n \geq 3$ sommets.

Si la fermeture de G est K_n, alors G est hamiltonien.
La réciproque est fausse.

Corollaire

Soit un graphe G (simple et non orienté) ayant $n \geq 3$ sommets.

Si pour tout couple de sommets non adjacents (x, y),
on a $\deg(x) + \deg(y) \geq n$, alors G est hamiltonien.

En particulier, si $\min_{v \in V} \deg(v) \geq n/2$, alors G est hamiltonien.

Le thm. d'Ore implique donc le thm. de Dirac.

Les deux derniers corollaires ne fournissent pas de condition nécessaire.

Contre-exemple :
un unique cycle C ayant ≥ 5 sommets : $\mathcal{F}(C) = C$.

Théorème de Bondy–Chvátal (1972)

Soit G un graphe (simple et non orienté) ayant $n \geq 3$ sommets ordonnés par degré croissant, i.e.,

$$\deg(v_1) \leq \deg(v_2) \leq \cdots \leq \deg(v_n).$$

Si, pour tout $k < n/2$, le graphe satisfait

$$\deg(v_k) \leq k \Rightarrow \deg(v_{n-k}) \geq n - k, \tag{1}$$

alors G possède un circuit hamiltonien.

Remarque

Si pour tout couple de sommets non adjacents (x, y), on a $\deg(x) + \deg(y) \geq n$. Alors ce graphe vérifie (1).
La réciproque est fausse.

D'un point de vue 'logique mathématique'

$$p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

(1)

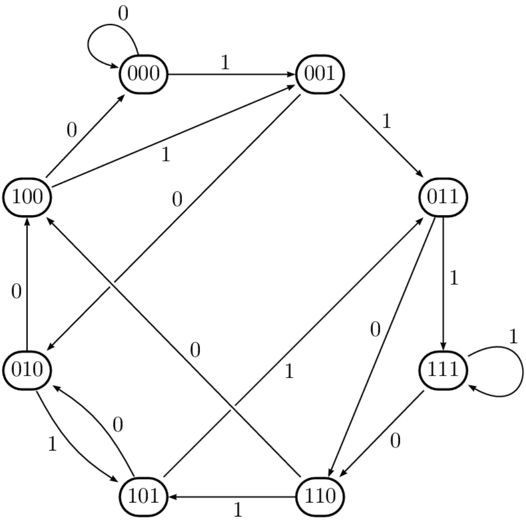
$$\forall k < n/2, \quad \deg(v_k) \leq k \Rightarrow \deg(v_{n-k}) \geq n - k$$

$n = 7$

$$(2, 2, 4, 5, 5, 5, 5)$$

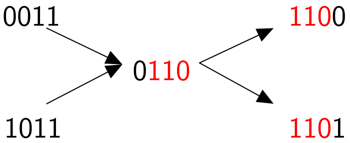
$k = 1, 2, 3$ $\deg(v_1) = 2 > 1$
$\deg(v_2) = 2 \leq 2$ & $\deg(v_5) \geq 5$
$\deg(v_3) = 4 > 3$

Graphe de De Bruijn (d'ordre 3 sur deux symboles)



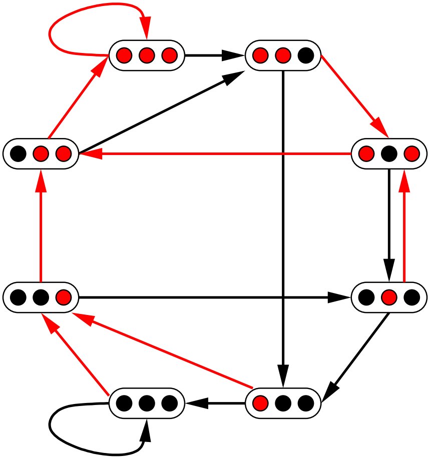
est Eulérien et Hamiltonien…

Par construction, le graphe de De Bruijn d'ordre n est Eulérien

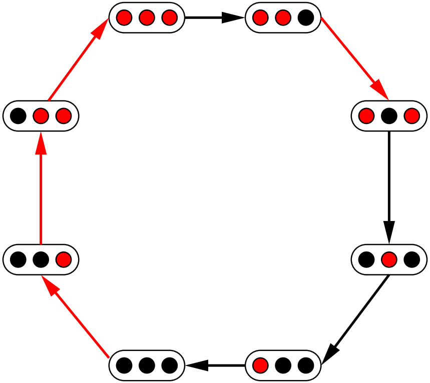


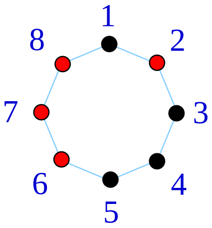
circuit eulérien du graphe d'ordre n
$\rightsquigarrow$ circuit hamiltonien du graphe d'ordre $n+1$

les ars de G_n correspondent exactement aux sommets de G_{n+1}

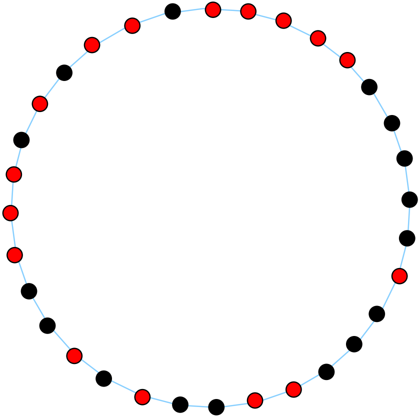


Chaque suite de 3 couleurs rouge/noir apparaît une et une seule fois dans le cyce de longueur 8 :





Chaque suite de 5 couleurs rouge/noir apparaît une et une seule fois dans le cyce de longueur 32 :



http://images.math.cnrs.fr/La-magie-des-colliers-de-perles-de-Nicolaas-Govert-de-Bruijn