Introduction aux mathématiques discrètes

Michel Rigo

http://www.discmath.ulg.ac.be/

Année 2018–2019

Organisation du cours

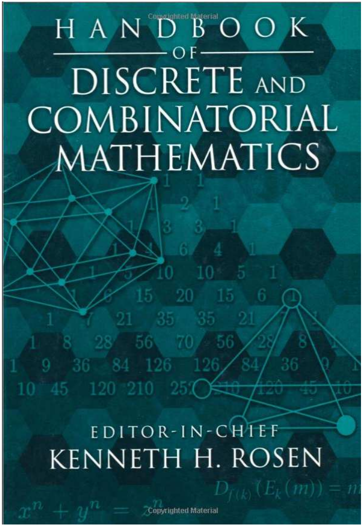
- Cours théorique : $8 \times$ 1h45 $=$ 14h
- Séances d'exercices : 7 ou $8 \times$ 1h30

Notes de cours, listes d'exercices, journal de bord, ...

- `http://www.discmath.ulg.ac.be/notesMDinge.html`

Podcasts via `MyULiège`

Qu'est-ce que les *mathématiques discrètes* ?

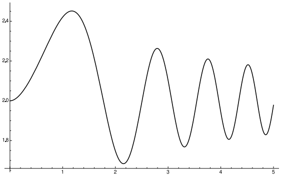


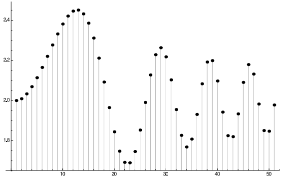
Some topics. . .

Counting Methods
Sequences
Number Theory
Algebraic Structures
Discrete Probability
Graph Theory
Partially Ordered Sets
Combinatorial Designs
Discrete Geometry
Coding Theory
Cryptology
Discrete Optimization
Theoretical Computer Science
Information Structures
Data Mining

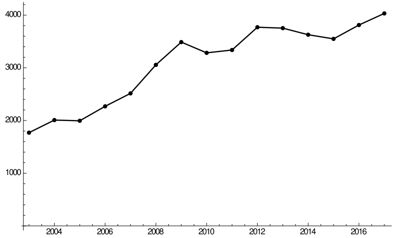
Continu vs. discret

Pixelated Image Abstraction, T. Gerstner, D.DeCarlo, et al.

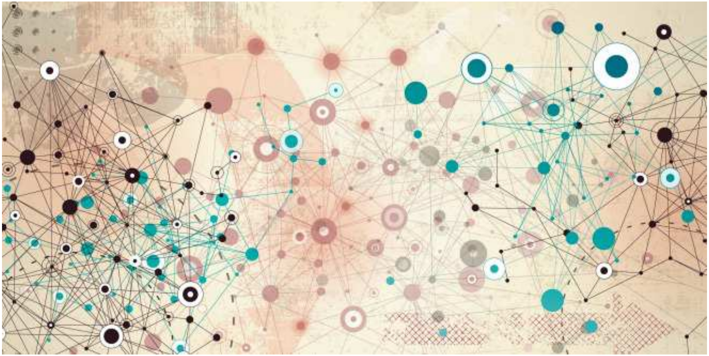




- sept ponts de Königsberg étudié (Euler, 1736)
- "*Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*" (König, 1936)
- milieu du vingtième siècle
  N. Biggs, C. Berge, P. Erdős, W.T. Tutte, ...
- 2010 Math. Subject Classification `05C` Graph theory
  - En 2016, 3812 articles de recherche "`05C`"
  - En 2017, 4032 articles de recherche "`05C`"



Is Graph Theory Key to Understanding Big Data ?
WIRED Mars 2014



iStock.com/AF-studio

Graph Theory : Key to Understanding Big Data
WIRED Mai 2014

Facebook CEO Mark Zuckerberg shows off Graph Search.

Photo : Ariel Zambelich/Wired

http ://innovationinsights.wired.com/insights/2014/05/graph-theory-key-understanding-big-data-2/

graphe **orienté**

Définition

- V un ensemble (fini ou infini)
- E une partie de $V \times V$ (i.e., une relation sur V).

Le graphe $G = (V, E)$ est la donnée du couple (V, E).

Les éléments de V sont les sommets de G (vertex/vertices).

Les éléments de E sont les arcs de G (edges).

Si V est fini, on parlera de graphe fini et $\#E \leq (\#V)^2$.

<u>ordre</u> au sein des couples appartenant à E

couple $(x, y) \neq$ paire $\{x, y\}$

Produit cartésien $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$

Graphe orienté - vocabulaire

Soient $V = \{v_i \mid i \in I\}$ et $a = (v_i, v_j)$, $i, j \in I$

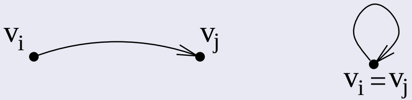
l'origine v_i et la destination v_j de l'arc a.

v_i et v_j sont les extrémités de l'arc a

a relie v_i à v_j.

Si $b = (v_i, v_i)$: b est une boucle.

Deux arcs adjacents ont au moins une extrémité en commun.

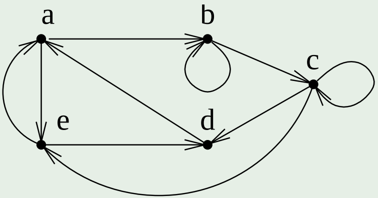


Un graphe orienté

Soit le graphe $G = (V, E)$ où $V = \{a, b, c, d, e\}$ et

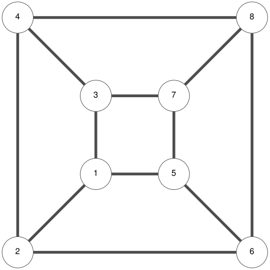
$$E = \{(a, b), (a, e), (b, b), (b, c), (c, c), (c, d),$$

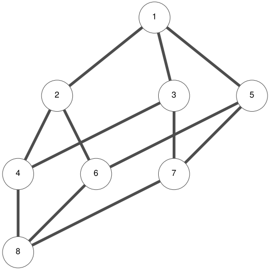
$$(c, e), (d, a), (e, a), (e, d)\}.$$

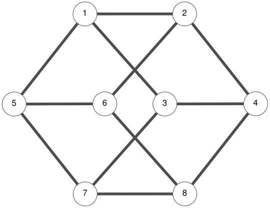


Il s'agit d'UNE *représentation* du graphe (parmi d'autres)

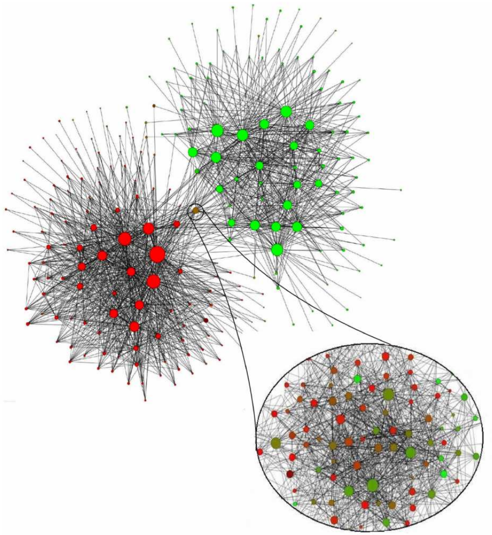
Le même graphe *ou* des graphes isomorphes







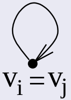
Les graphes « réels » sont « grands »



Réseau Mobistar $\pm 2.10^6$ abonnés – arXiv0803.0476, V. Blondel et al.

Graphe orienté - vocabulaire

Soit $a = (v_i, v_j) \in E$.



a est un arc sortant de v_i ou arc incident à v_i vers l'extérieur

a est un arc entrant dans v_j ou arc incident à v_j vers l'intérieur

ensemble des arcs sortant de $v_i = \omega^+(v_i)$

ensemble des arcs entrant dans $v_j = \omega^-(v_j)$

ensemble des arcs incidents $= \omega(v) := \omega^+(v) \cup \omega^-(v)$

demi-degré sortant (resp. demi-degré entrant) d'un sommet v

$$d^+(v) = \#(\omega^+(v)) \quad d^-(v) = \#(\omega^-(v)).$$

Handshaking formula

$$\sum_{v \in V} d^{+}(v) = \sum_{v \in V} d^{-}(v).$$

Définition (suite...)

degré de v : $\deg(v) = d^+(v) + d^-(v)$

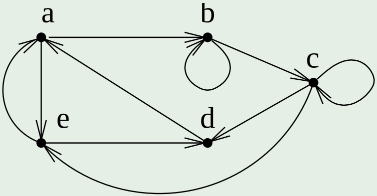
ensemble des successeurs de v : $\mathrm{succ}(v) = \{s_1, \ldots, s_k\}$
sommets s_i tels que $(v, s_i) \in \omega^+(v)$, i.e., $(v, s_i) \in E$.

ensemble des prédécesseurs de v : $\mathrm{pred}(v) = \{s_1, \ldots, s_k\}$
sommets s_i tels que $(s_i, v) \in \omega^-(v)$, i.e., $(s_i, v) \in E$.

ensemble des voisins de v : $\nu(v) = \mathrm{pred}(v) \cup \mathrm{succ}(v)$

Si u appartient à $\nu(v)$, u et v sont des sommets voisins

Exemple (suite...)



$\omega^+(a) = \{(a,b),(a,e)\}$, $\omega^-(d) = \{(c,d),(e,d)\}$,

$\mathrm{succ}(a) = \{b,e\}$, $\mathrm{succ}(b) = \{b,c\}$, $\mathrm{pred}(d) = \{c,e\}$,

$\nu(a) = \{b,d,e\}$,

les arcs (e,a) et (d,a) sont adjacents,

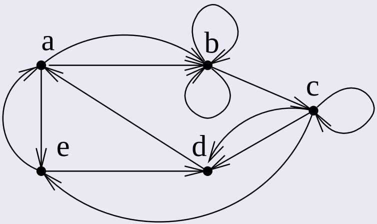
$d^+(c) = 3$

Définition naïve

Un multi-ensemble : $\{1,1,2,3\}$, $\{1,2,3\}$ et $\{1,2,2,3\}$
$\{1_1, 1_2, 1_3, 2_1, 2_2, 3\}$

Définition

Un multi-graphe $G = (V, E)$ est un graphe pour lequel l'ensemble E des arcs est un multi-ensemble.



Un multi-graphe $G = (V, E)$ est fini si V et E sont finis

⚠ V fini n'implique pas E fini.

Pour les multi-graphes

- « handshaking formula » OK

on adapte

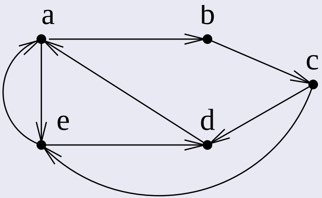
- $\omega^+(v)$, $d^+(v)$, $\mathrm{succ}(v)$
- $\omega^-(v)$, $d^-(v)$, $\mathrm{pred}(v)$

$\omega^+(v)$ et $\omega^-(v)$ sont en général des multi-ensembles.

Définition

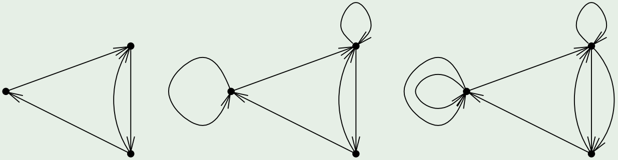
Un graphe $G = (V, E)$ est simple

- il ne s'agit pas d'un multi-graphe, pas d'arête multiple,
- E est irréflexif : $\forall v \in V$, $(v, v) \notin E$, pas de boucle



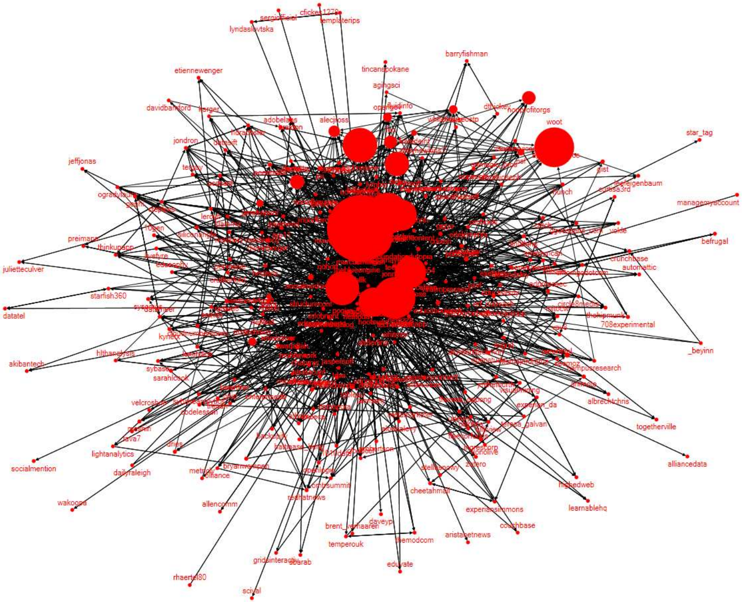
En résumé

Un graphe (orienté) simple, un graphe et un multi-graphe



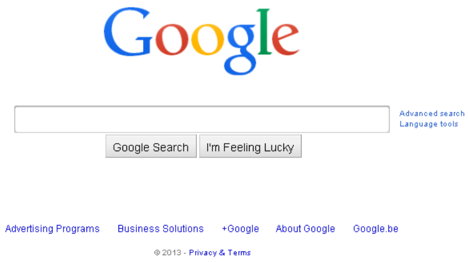
Quelques exemples de graphes orientés

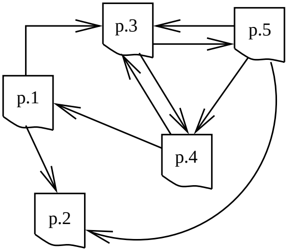
- le graphe de Twitter
- le graphe des pages web
- les flux de migration entre pays du globe
- un réseau routier avec des sens uniques
- relation d'ordre



Visualizing my Twitter Network by number of followers.

Michael Atkisson http ://woknowing.wordpress.com/



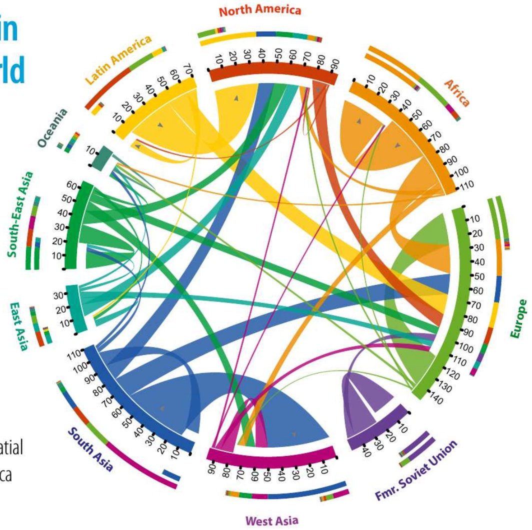


Les pages et les liens entre les pages

Migration flows within and between ten world regions, in 100,000's

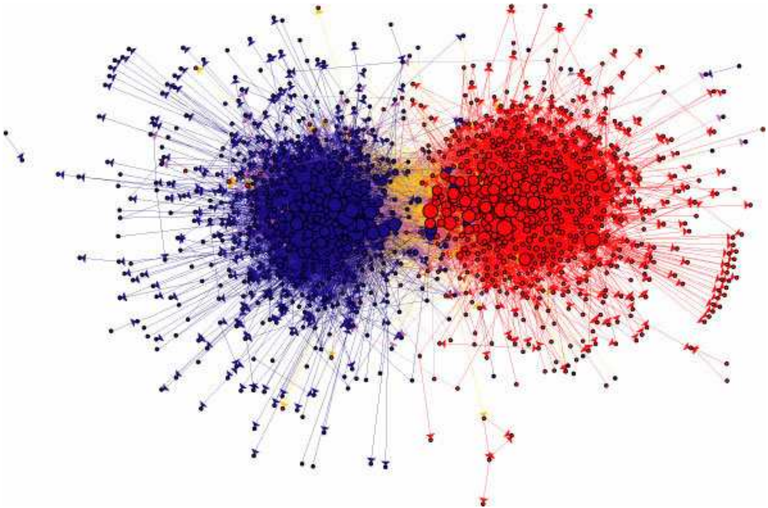
This circular plot shows all global bilateral migration flows for the five-year period mid-2005 to mid-2010, classified into a manageable set of ten world regions.

Key features of the global migration system include the high concentration of African migration within the continent (with the exception of Northern Africa), the 'closed' migration system of the former Soviet Union, and the high spatial focus of Asian emigration to North America and the Gulf states.

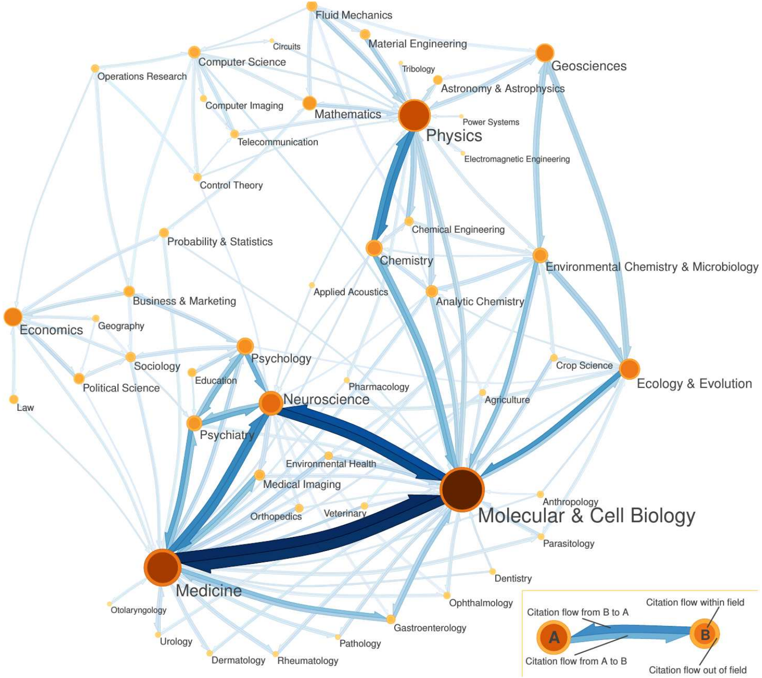


http://download.gsb.bund.de/BIB/global_flow/

Quantifying Global International Migration Flows, G. J. Abel, N. Sande, Science 2014 blogs politiques avant l'élection présidentielle aux USA de 2004.



http ://www-personal.umich.edu/~ladamic/img/politicalblogs.jpg



http://eigenfactor.org

Définition

Soit $G = (V, E)$ un graphe (resp. un multi-graphe).

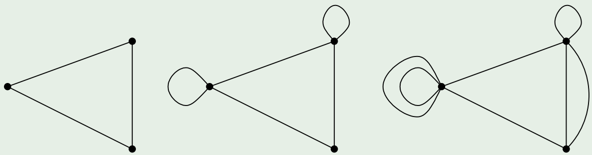
Si E est une relation symétrique sur V,
alors G est un graphe (resp. un multi-graphe) non orienté, i.e.,

$$\forall v_1, v_2 \in V : (v_1, v_2) \in E \Rightarrow (v_2, v_1) \in E.$$

On identifie les arcs (v_i, v_j) et (v_i, v_j)
avec une unique arête (non orientée) : la paire $\{v_i, v_j\}$.

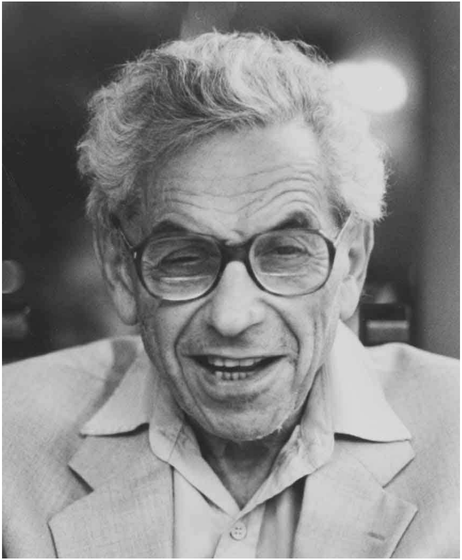
En résumé

Un graphe (non orienté) simple, un graphe et un multi-graphe

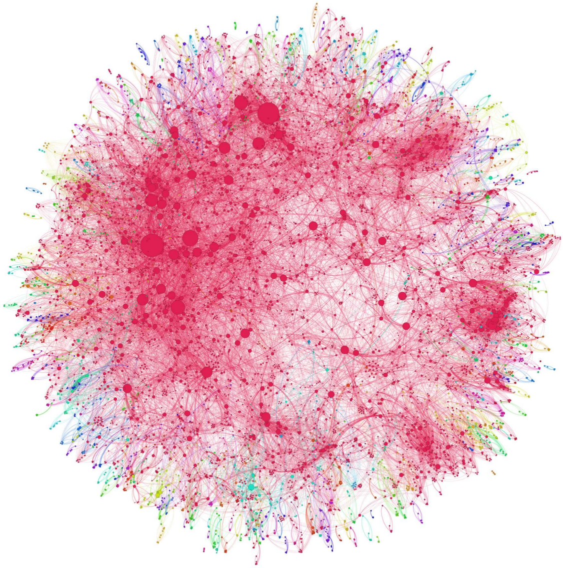



facebook

Des co-auteurs scientifiques et le nombre d'Erdős



Paul Erdős (1913–1996), mathématicien hongrois
Total Publications : 1425, Total Citations : 12847

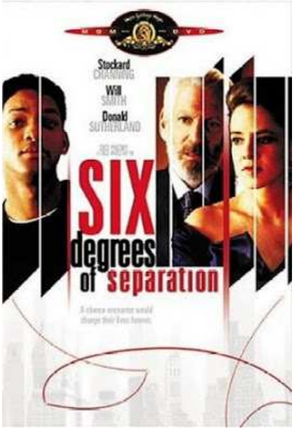


co-authorship network of 8,500 doctors and scientists publishing on hepatitis C virus between 2008 and 2012

M. Newman, the structure of scientific collaboration networks (2001).

Small-world phenomenom

"I read somewhere that everybody on this planet is separated only by six other people. *Six degrees of separation*. Between us and everyone else on this planet."



John Guare

Un peu de vocabulaire

Soient $G = (V, E)$ multi-graphe **non orienté**, $a = \{v_i, v_j\} \in E$.

a est incident à v_i et v_j.

degré de v_i, $\deg(v_i) = \#$ arêtes incidentes à v_i.

⚠ les **boucles** apportent une double contribution au degré.

ensemble des arêtes incidentes à v_i : $\omega(v_i)$.
Si G est simple, $\deg(v_i) = \#(\omega(v_i))$.

$\leadsto$ Notations compatibles avec le cas orienté.

Deux arêtes sont adjacentes si au moins une extrémité en commun.

Deux sommets $v_i, v_j \in V$ sont adjacents/voisins, si $\{v_i, v_j\} \in E$.

ensemble des voisins de v : $\nu(v)$

Handshaking formula (bis)

Si $G = (V, E)$ est un multi-graphe non orienté, alors

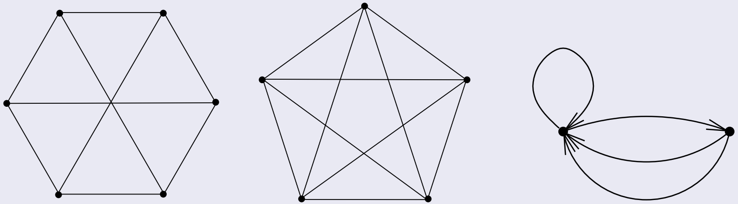
$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2\,\#E.$$

On comprend mieux la double contribution des boucles pour le degré d'un sommet...

Définition

Soit $k \geq 1$. Un multi-graphe orienté (resp. non orienté) $G = (V, E)$ est *k-régulier* si

$$\forall v \in V,\ d^+(v) = k \quad \text{(resp. } \deg(v) = k\text{).}$$

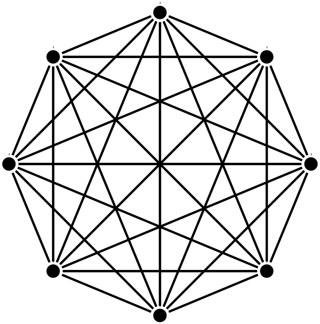


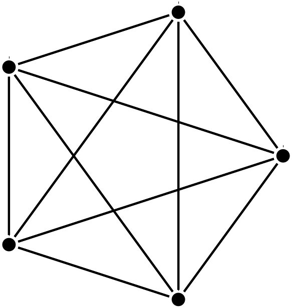
Définition (suite...)

Un graphe $G = (V, E)$ est complet si $E = V \times V$ et il est sous-entendu que ce graphe est simple et non orienté, i.e.,

$$E = V \times V \setminus \{(v, v) \mid v \in V\}$$

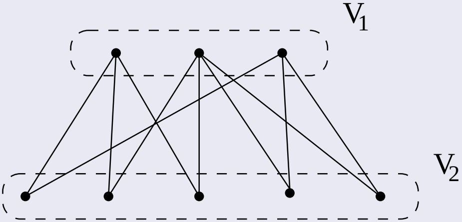
notation K_n





Définition

Un graphe $G = (V, E)$ est biparti
si V partitionné en V_1 et V_2 t.q. $E \subseteq V_1 \times V_2$.

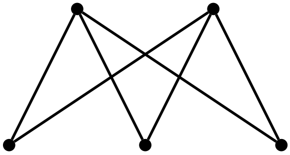


Graphe biparti complet $K_{m,n}$:

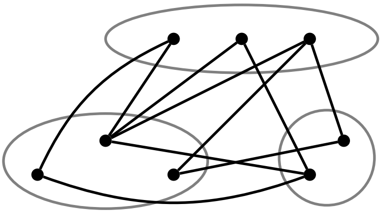
$$\# V_1 = m, \quad \# V_2 = n, \quad E = V_1 \times V_2.$$

graphes n-partis, $n \geq 2$,
V partitionné en n sous-ensembles $V_1, \ldots, V_n$ t.q.

$$E \subseteq \bigcup_{i \neq j} V_i \times V_j .$$

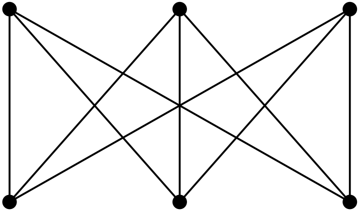


$K_{2,3}$



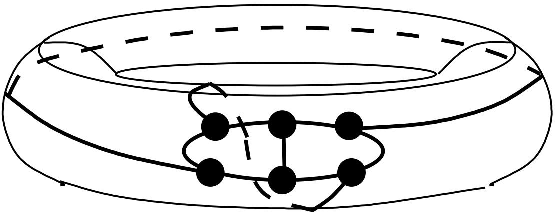
Le *problèmes des 3 villas*, eau, gaz, électricité,...

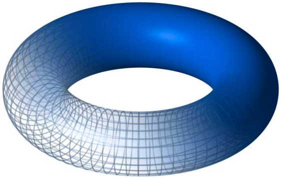
$K_{3,3}$



Démonstration ? nous verrons que $K_{3,3}$ n'est pas planaire...

Sur un tore (surface de genre 1)





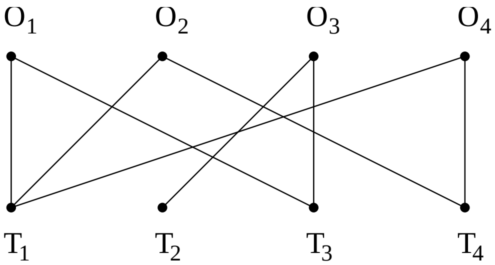
Problèmes d'affectation

ouvriers : $O_1, \ldots, O_k$

postes de travail : $T_1, \ldots, T_t$

Chaque ouvrier O_i possède certaines qualifications lui permettant de travailler sur certains postes $T_{i,1}, \ldots, T_{i,d_i}$.

Comment répartir les ouvriers pour que chaque poste de travail soit occupé par au moins un ouvrier ?



DÉFINITION

Soit $G = (V, E)$ un multi-graphe non orienté.

Un chemin de longueur $k \geq 1$ est une suite ordonnée $(e_1, \dots, e_k)$ de k arêtes adjacentes $e_i = \{e_{i,1}, e_{i,2}\}$,

$$\forall i \in \{1, \dots, k-1\}, \quad e_{i,2} = e_{i+1,1}.$$

Ce chemin joint les sommets $e_{1,1}$ et $e_{k,2}$,
passe par les arêtes $e_1, \dots, e_k$, les sommets $e_{1,1}, e_{1,2}, \dots, e_{k,1}, e_{k,2}$.

Un chemin de longueur 0 joint toujours un sommet à lui-même.

Si $e_{1,1} = e_{k,2}$: cycle, circuit, chemin fermé

⚠ Terminologie variable suivant les auteurs et la langue...

Définitions (suite)

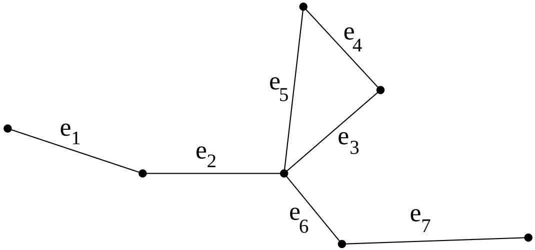
chemin dont les arêtes sont toutes distinctes :
piste ou chemin élémentaire

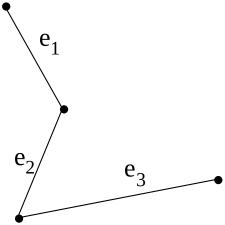
circuit dont les arêtes sont toutes distinctes :
piste fermée ou circuit élémentaire

chemin ne passant pas deux fois par un même sommet
(en particulier, toutes ses arêtes sont distinctes) : chemin simple

circuit ne passant pas deux fois par un même sommet — à l'exception du 'point de départ' : circuit simple

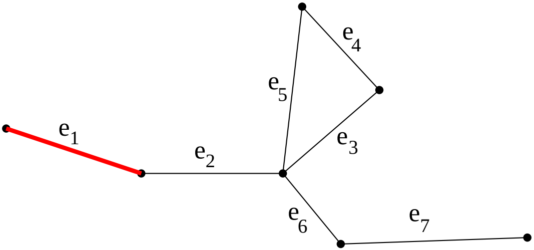
Piste (ou chemin élémentaire) — chemin simple

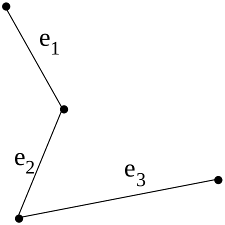




$(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7)$ (e_1, e_2, e_3)

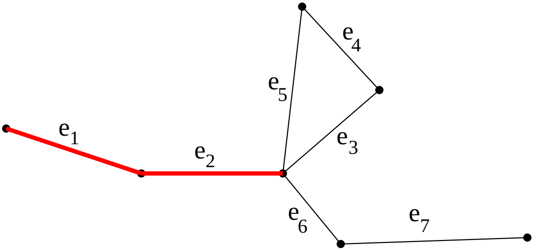
Piste (ou chemin élémentaire) — chemin simple

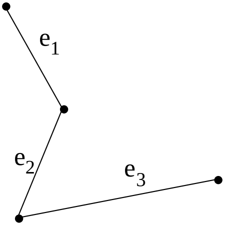




$(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7) \qquad (e_1, e_2, e_3)$

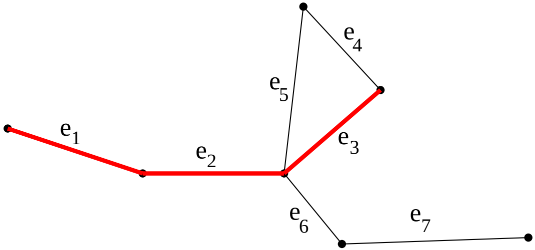
Piste (ou chemin élémentaire) — chemin simple

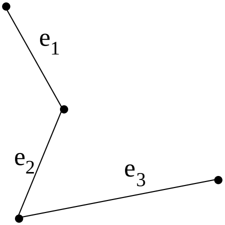




$(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7)$ $\quad$ (e_1, e_2, e_3)

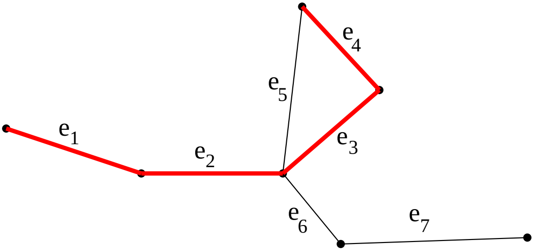
Piste (ou chemin élémentaire) — chemin simple

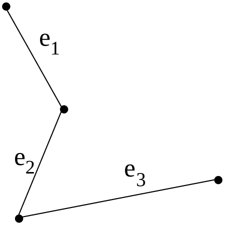




$(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7)$ (e_1, e_2, e_3)

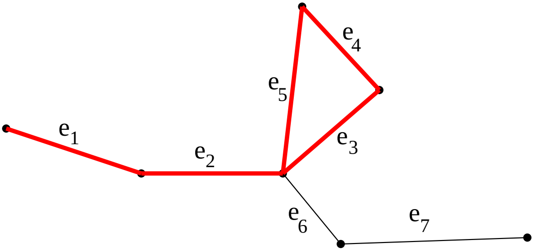
Piste (ou chemin élémentaire) — chemin simple

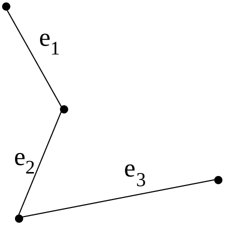




$(e_1, e_2, e_3, {\color{red}e_4}, e_5, e_6, e_7)$ (e_1, e_2, e_3)

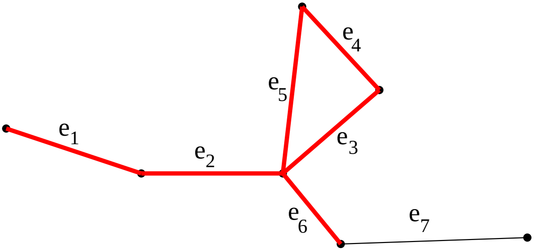
Piste (ou chemin élémentaire) — chemin simple

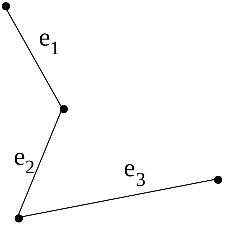




$(e_1, e_2, e_3, e_4, \color{red}{e_5}, e_6, e_7)$ (e_1, e_2, e_3)

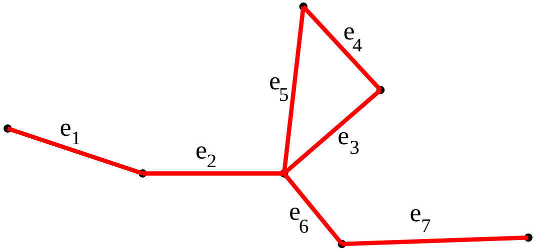
Piste (ou chemin élémentaire) — chemin simple

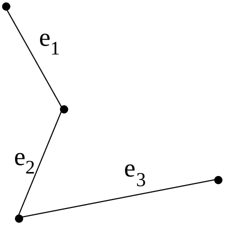




$(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7)$ $\quad$ (e_1, e_2, e_3)

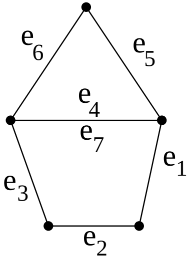
Piste (ou chemin élémentaire) — chemin simple

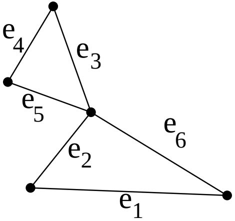


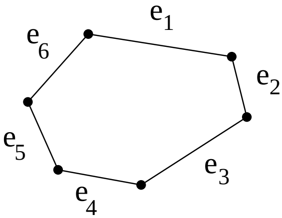


$(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7)$ (e_1, e_2, e_3)

CIRCUIT, PISTE FERMÉE ET CIRCUIT SIMPLE

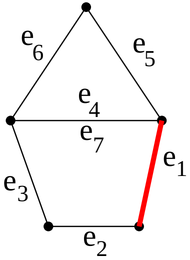


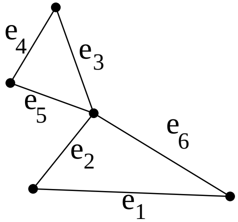


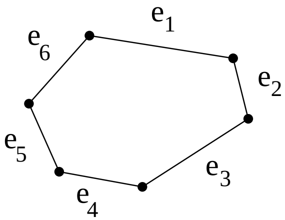


$(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_4)$ $\qquad$ $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$

CIRCUIT, PISTE FERMÉE ET CIRCUIT SIMPLE

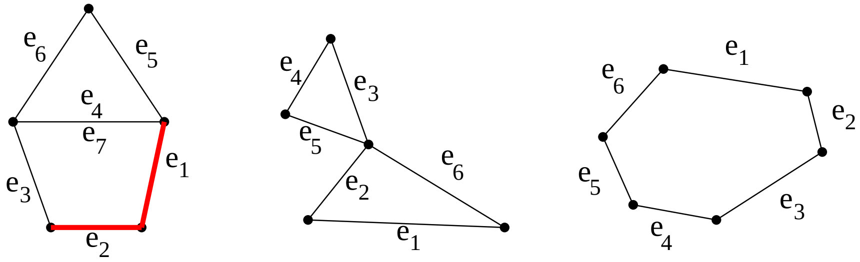






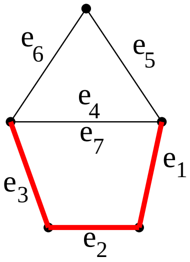
$(\color{red}{e_1}, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_4)$ $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$

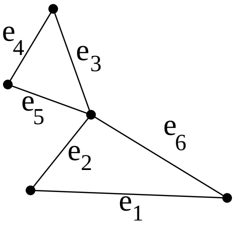
CIRCUIT, PISTE FERMÉE ET CIRCUIT SIMPLE

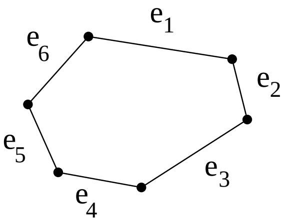


$(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_4)$ $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$

CIRCUIT, PISTE FERMÉE ET CIRCUIT SIMPLE

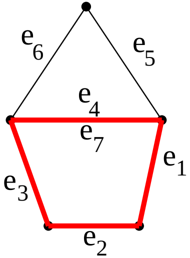


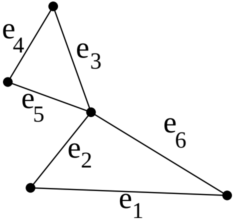


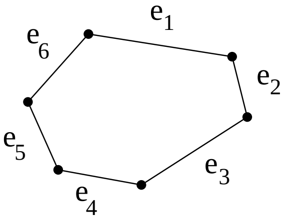


$(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_4)$ $\qquad$ $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$

CIRCUIT, PISTE FERMÉE ET CIRCUIT SIMPLE

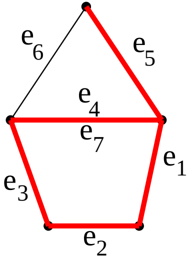


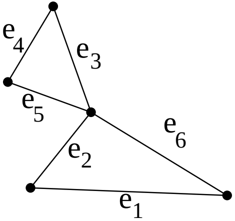


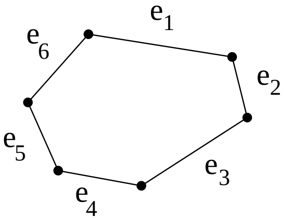


$(e_1, e_2, e_3, \textcolor{red}{e_4}, e_5, e_6, e_4)$ $\qquad$ $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$

CIRCUIT, PISTE FERMÉE ET CIRCUIT SIMPLE

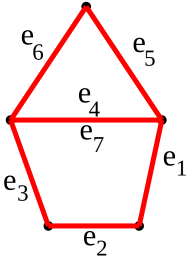


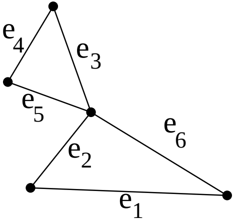


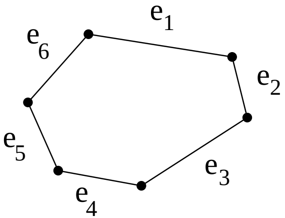


$(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_4)$ $\quad$ $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$

CIRCUIT, PISTE FERMÉE ET CIRCUIT SIMPLE

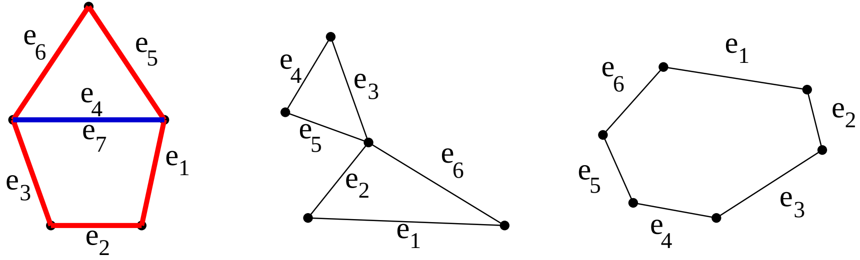






$(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_4)$ $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$

CIRCUIT, PISTE FERMÉE ET CIRCUIT SIMPLE



$(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_4)$ $\qquad$ $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$

Remarque

Dans le cas d'un graphe (qui n'est pas un multi-graphe), un chemin de longueur k est aussi univoquement déterminé par une *suite de sommets* $(v_0, \dots, v_k)$ de manière telle que $\{v_i, v_{i+1}\}$ est une arête du graphe.

Connexité

Définition

Deux sommets a et b sont connectés,
s'il existe un chemin les joignant : $a \sim b$

Remarque : *un sommet est connecté à lui-même* (reflexivité)

composante connexe :

- classe d'équivalence pour $\sim$, ou,
- ensemble maximal (pour $\subseteq$) de sommets 2 à 2 connectés.

Un multi-graphe non orienté est connexe si

- $V/\sim$ contient une seule composante connexe, ou,
- $\forall a, b \in V$, $a \sim b$

Remarque : *on supposera que* $G = (\{v\}, \emptyset)$ *est connexe*

Chemins dans le cas orienté

Définition

⚠ $G = (V, E)$ multi-graphe orienté.
chemin de longueur $k \geq 1$: suite ordonnée

$$(e_1, \dots, e_k)$$

de k arcs $e_i = (e_{i,1}, e_{i,2})$ t.q. $\forall i \in \{1, \dots, k-1\}$, $e_{i,2} = e_{i+1,1}$.

Ce chemin joint les sommets $e_{1,1}$ et $e_{k,2}$.

S'il existe un chemin joignant deux sommets a et b : $a \to b$.

a et b sont fortement connectés ($a \leftrightarrow b$), si $a \to b$ et $b \to a$.

Remarque : *on impose $a \leftrightarrow a$ (réflexivité)*
"être fortement connecté" est une relation d'équivalence sur V.

Forte connexité

Définition

composante fortement connexe (ou f. connexe) de G :

- classe d'équivalence pour $\leftrightarrow$, ou,
- ensemble maximal M de sommets tels que pour $a, b \in M$, $a \to b$ (en particulier, $b \to a$)

$G = (V, E)$ est fortement connexe (ou f. connexe)

- $V/\leftrightarrow$ contient une seule classe, ou,
- $\forall a, b \in V$, $a \to b$ (en particulier, $b \to a$)

Remarque : les sommets appartenant à un cycle (élémentaire) maximal constituent une composante f. connexe.

Un multi-graphe orienté G est f. connexe SSI il existe un cycle passant par chaque sommet de celui-ci.

Simple connexité

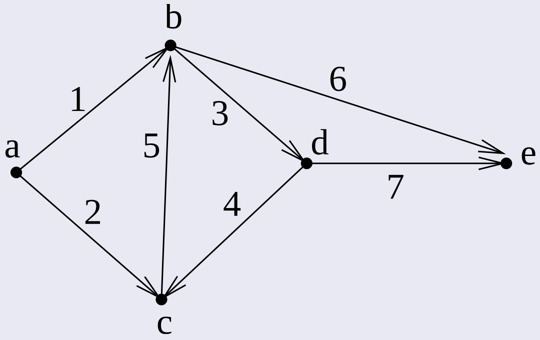
Définition

Si on supprime l'orientation des arcs de G et
si le multi-graphe non orienté obtenu est connexe,
alors G est simplement connexe (ou s. connexe).

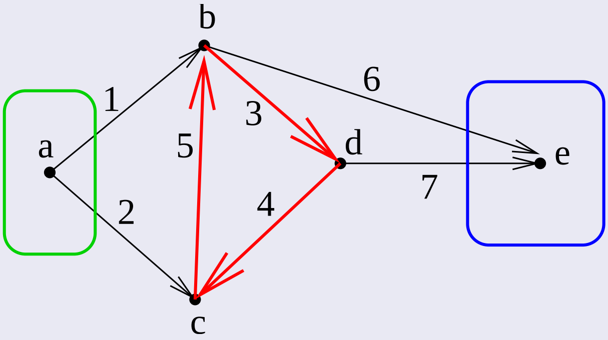
$\leadsto$ composantes simplement connexes (ou s. connexes de G).

Connexité

Exemple, s. connexe ? f. connexe ?



Exemple, s. connexe ? f. connexe ?



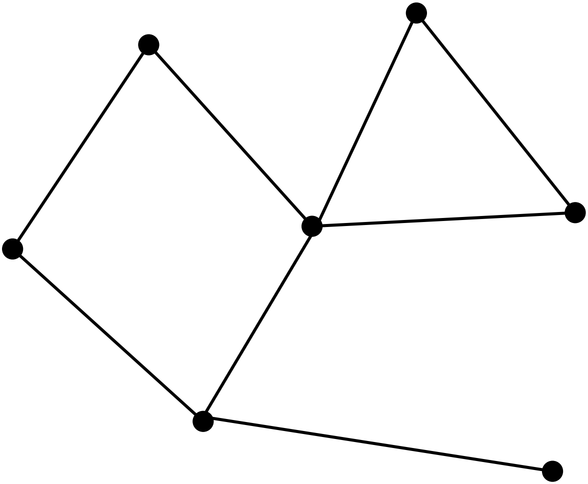
Connexité des graphes non orientés

⚠ Test de connexité : un graphe simple suffit.

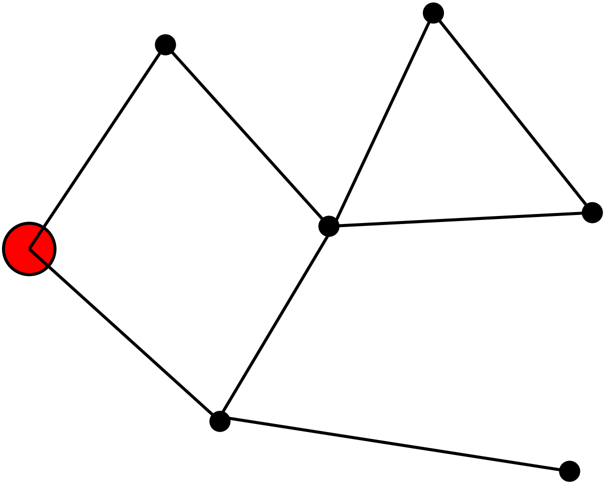
Algorithme naïf permettant de tester la connexité :

```
Choisir au hasard un sommet v0 ∈ V
Composante:= {v0},   New:= {v0}
Tant que New≠ ∅
   Voisins:= ∅
   pour tout sommet v appartenant à New
      Voisins:= Voisins∪ν(v)
   New:= Voisins\Composante
   Composante:= Composante∪New
Si Composante=V
   alors sortie : "oui, G connexe"
   sinon sortie : "non, G non connexe"
```

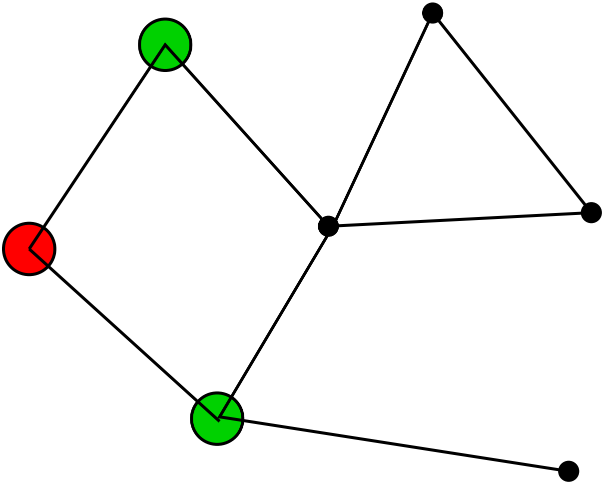
Connexité des graphes non orientés



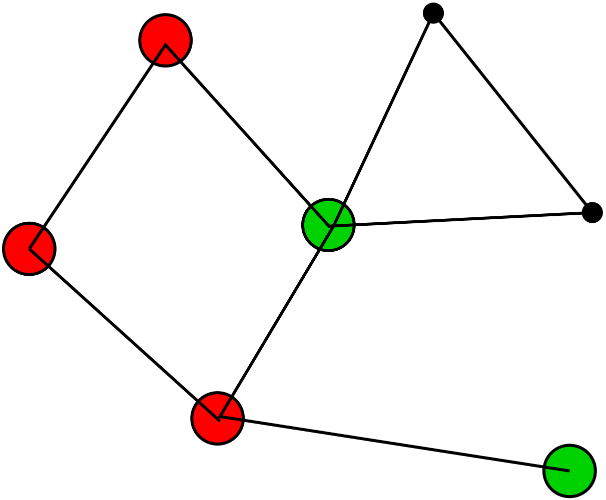
Connexité des graphes non orientés



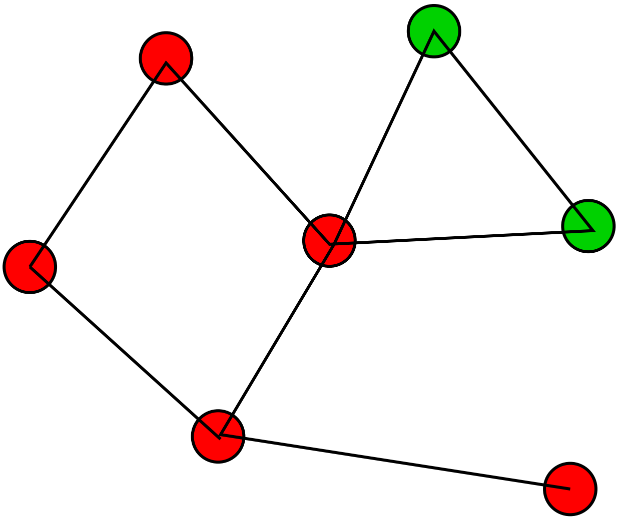
Connexité des graphes non orientés



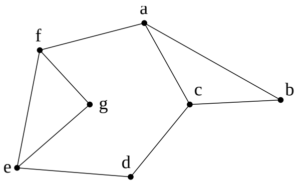
Connexité des graphes non orientés



Connexité des graphes non orientés



Connexité des graphes non orientés



représentation du graphe : dictionnaire des voisins / *adjacency list*

v	$\nu(v)$
a	$\{b, c, f\}$
b	$\{a, c\}$
c	$\{a, b, d\}$
d	$\{c, e\}$
e	$\{d, f, g\}$
f	$\{a, e, g\}$
g	$\{e, f\}$

Connexité des graphes non orientés

$v_0 = c$.

Composante	New	Voisins
$\{c\}$	$\{c\}$	$\emptyset$ $\nu(c) = \{a, b, d\}$
$\{c\} \cup \{a, b, d\}$ $= \{a, b, c, d\}$	$\{a, b, d\} \setminus \{c\}$ $= \{a, b, d\}$	$\emptyset$ $\nu(a) \cup \nu(b) \cup \nu(d)$ $= \{a, b, c, e, f\}$
$\{a, b, c, d\} \cup \{e, f\}$ $= \{a, b, c, d, e, f\}$	$\{a, b, c, e, f\} \setminus \{a, b, c, d\}$ $= \{e, f\}$	$\emptyset$ $\nu(e) \cup \nu(f)$ $= \{a, d, e, f, g\}$
$\{a, b, c, d, e, f\} \cup \{g\}$ $= \{a, b, c, d, e, f, g\}$	$\{a, d, e, f, g\} \setminus \{a, b, c, d, e, f\}$ $= \{g\}$	$\emptyset$ $\nu(g) = \{e, f\}$
$\{a, b, c, d, e, f, g\} \cup \{e, f\}$ $= \{a, b, c, d, e, f, g\}$	$\{e, f\} \setminus \{a, b, c, d, e, f, g\}$ $= \emptyset$	

Décomposition en composantes f. connexes

Rappels :

- ensemble des arcs sortant de $v_i = \omega^+(v_i)$
- ensemble des successeurs de v : $\mathrm{succ}(v) = \{s_1, \ldots, s_k\}$
  sommets s_i tels que $(v, s_i) \in \omega^+(v)$, i.e., $(v, s_i) \in E$.
- ensemble des arcs entrant dans $v_j = \omega^-(v_j)$
- ensemble des prédécesseurs de v : $\mathrm{pred}(v) = \{s_1, \ldots, s_k\}$
  sommets s_i tels que $(s_i, v) \in \omega^-(v)$, i.e., $(s_i, v) \in E$.

Si W est un ensemble de sommets,

$$\mathrm{succ}(W) = \bigcup_{v \in W} \mathrm{succ}(v)$$

Clôture réflexive et transitive de succ

$$\mathrm{succ}^*(v) := \bigcup_{j=0}^{\infty} \mathrm{succ}^j(v) \quad \text{où} \quad \begin{cases} \mathrm{succ}^0(v) = v \\ \mathrm{succ}^{j+1}(v) = \mathrm{succ}(\mathrm{succ}^j(v)) \end{cases} .$$

$$\text{Si } G \text{ est fini,} \quad \mathrm{succ}^*(v) = \bigcup_{j=0}^{\#E} \mathrm{succ}^j(v).$$

S'il existe $k < \#E$ tel que $\mathrm{succ}^k(v) = \mathrm{succ}^{k+1}(v)$, alors

$$\mathrm{succ}^*(v) = \bigcup_{j=0}^{k} \mathrm{succ}^j(v).$$

$$\forall a, b \in V, \quad a \to b \Leftrightarrow b \in \mathrm{succ}^*(a).$$

Décomposition en composantes f. connexes

Clôture réflexive et transitive de pred

Idem avec pred^*.

$$\forall a, b \in V, \quad b \to a \Leftrightarrow b \in \mathrm{pred}^*(a).$$

$$a \leftrightarrow b \Leftrightarrow b \in \mathrm{succ}^*(a) \cap \mathrm{pred}^*(a).$$

Décomposition en composantes f. connexes

L'algorithme précédent (test de connexité) s'adapte pour calculer $\mathrm{succ}^*(a)$ (resp. $\mathrm{pred}^*(a)$).

- Initialiser les variables `Composante` et `New` à $\{a\}$
- Remplacer $\nu(v)$ par $\mathrm{succ}(v)$ (resp. $\mathrm{pred}(v)$).

En recherchant l'intersection des deux ensembles,
on détermine alors la composante f. connexe du sommet a.

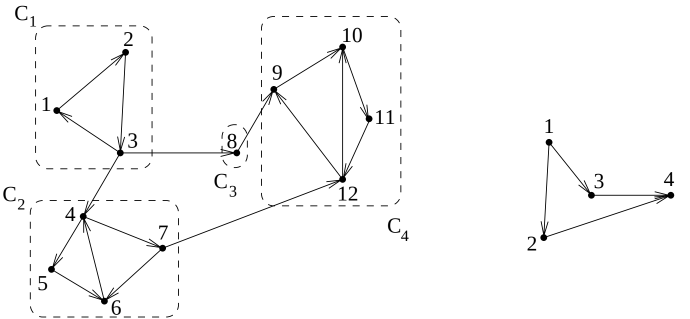
Remarque : *encore une fois, il suffit de regarder des graphes orientés simples.*

Définition

Soit $G = (V, E)$ un (multi-)graphe orienté.

Graphe *acyclique* des composantes ou condensé de G :

sommets $=$ les composantes f. connexes de G.
arc entre deux composantes f. connexes A et B,
s'il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $a \to b$.



Remarque

S'il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $a \to b$,
alors il n'existe aucun $a' \in A$, $b' \in B$ tels que $b' \to a'$.

Sinon $A \cup B$ serait une composante f. connexe de G.
Absurde vu la maximalité des composantes connexes !

Conclusion : *le graphe des composantes est sans cycle*.

Distance

Soit $G = (V, E)$ un multi-graphe non orienté connexe

(pour avoir une fonction totale, définie pour tout couple de sommets).

La distance entre a et $b \in V$, $\mathrm{d}(a, b)$, est
la longueur d'un plus court chemin joignant a et b.
Le diamètre de G est

$$\mathrm{diam}(G) = \max_{a,b \in V} \mathrm{d}(a, b).$$

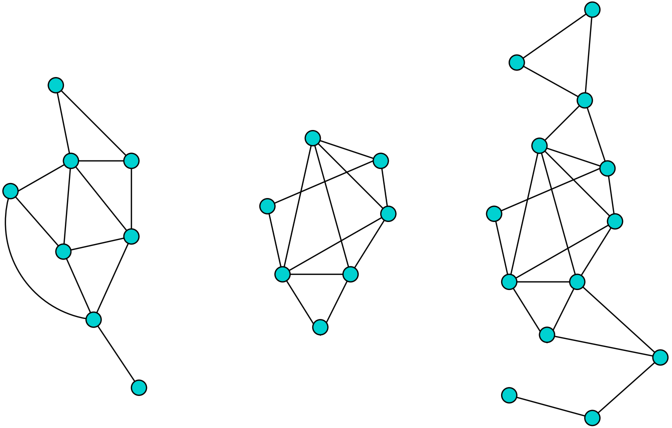
Si G est pondéré par $p : E \to \mathbb{R}^+$, la distance entre les sommets a et b est égale au poids minimal des chemins joignant a et b, i.e.,

$$\mathrm{d}(a, b) = \min_{\substack{\text{chemin } (e_1,\ldots,e_t) \\ \text{joignant } a \text{ et } b}} \sum_{i=1}^{t} p(e_i).$$

Rappel, en math. une distance vérifie

1. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$,
2. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ si et seulement si $\mathbf{x} = \mathbf{y}$,
3. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$,
4. $d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ (inégalité triangulaire),

Que vaut le diamètre des graphes suivants ?



Définition. . .

distance et diamètre s'adaptent aux multi-graphes orientés fortement connexes.

Cependant, la *fonction*

$$\mathrm{d}(\cdot, \cdot)$$

n'est en général pas symétrique.

Distance

Minimiser le nombre de “hops”

```
> traceroute www.google.be
traceroute to www.google.be (66.249.85.99), 30 hops max,
40 byte packets
1 mont3-0014.gw.ulg.ac.be (139.165.159.1)
2 segi3-0813-mont3.gw.ulg.ac.be (193.190.228.125)
3 inet3-3031.gw.ulg.ac.be (139.165.192.49)
4 fe.m20.access.liege.belnet.net (193.191.10.17)
5 oc48.m160.core.science.belnet.net (193.191.1.185)
6 oc192.m160.ext.science.belnet.net (193.191.1.2)
7 216.239.43.88
8 64.233.175.249
9 216.239.46.49
10 66.249.85.99
```