TP4 : Diagonalisation

Partie 1

Exercice 1. Diagonaliser si possible les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Déterminer quelle(s) valeur(s) du complexe α rende(nt) diagonalisables les matrices

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & 2\alpha & -\alpha \\ -2 & -\alpha & 2 \\ -1 & 2\alpha & 1 \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} -1 & 2\alpha & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2\alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. Soient A et B deux matrices de $\mathbb{C}_n^n$. Prouver que si les valeurs propres de A sont simples et que B commute avec A, alors B est diagonalisable.

Partie 2

Exercice 1.

1. Chercher les valeurs propres de l'opérateur

$$T : \mathbb{C}_n[z] \longrightarrow \mathbb{C}_n[z] : P \longmapsto (z^2 - 1)D_z^2 P + (2z + 1)D_z P$$

après avoir vérifié qu'il était linéaire.

2. Même question pour l'opérateur

$$S : \mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R}_n[x] : P \longmapsto \frac{1}{x-1} \int_1^x P(t)dt.$$

Lorsque $n = 2$, trouver une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ telle que la matrice qui représente S dans $\mathcal{B}$ soit diagonale.

Exercice 2 (Juin 2010)**.** Diagonaliser, si possible, les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si $M \in \{A, B\}$ est diagonalisable, fournir explicitement une matrice S et la matrice diagonale $S^{-}MS$ correspondante.

Exercice 3 (Juin 2013)**.** Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les conditions sur $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ pour que M soit diagonalisable. Quand M est diagonalisable, fournir une matrice inversible S telle que $S^{-1}MS$ soit diagonale.

Partie 3

Exercice 1. Soit $A = \text{diag}(A_1, ..., A_k)$ où A_i est une matrice complexe carrée pour tout i. Prouver que le polynôme minimum de A est égal au ppcm de celui des A_i.

Exercice 2. Soient $\alpha \in \mathbb{C}_0$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. On désigne par T l'application

$$T : \mathbb{C}_n[z] \longrightarrow \mathbb{C}_n[z] : P \longmapsto P(\alpha) + \alpha(D_z P)(\alpha)z + \frac{\alpha^2}{2}(D_z^2 P)(\alpha)z^2.$$

1. Montrer que T est linéaire.
2. Donner une représentation matricielle M de la restriction de T à $\mathbb{C}_2[z]$ ainsi que son polynôme caractéristique.
3. Pour quelle(s) valeur(s) de α la matrice M est-elle diagonalisable ?
4. Déterminer le polynôme minimum de M.
5. Déterminer le rang de T. Montrer que $\mathbb{C}_n[z] = \text{im}(T) \oplus \ker(T)$.
6. Donner les polynômes minimum et caractéristique de T.

Exercice 3. Soit $A \in \mathbb{C}_n^n$ tel que $A^3 + I = 0$ et $\text{tr}(A) = \det(A) = -1$. Déterminer le polynôme caractéristique de A.

Exercice 4. Soit

$$T : \mathbb{C}_2^2 \longrightarrow \mathbb{C}_2^2 : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2c & a+c \\ b-2c & d \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que T est linéaire.
2. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres associés de T.
3. Déterminer si T est diagonalisable.
4. Donner le polynôme minimum de T.

Exercice 5. Soit E un espace vectoriel sur un champ $\mathbb{K}$ de dimension n et T un endomorphisme de E. Montrer que si $x \in E$ est tel que $x, T(x), ..., T^{n-1}(x)$ est une base de E, alors les polynômes minimum et caractéristique de T coïncident (au signe près).

Exercice 6. Soit $n \leq 1$. Déterminer les polynômes minimum et caractéristique des applications

1. $S : \mathbb{C}_n[z] \longrightarrow \mathbb{C}_n[z] : P \longmapsto P(z+1)$,
2. $D : \mathbb{C}_n[z] \longrightarrow \mathbb{C}_n[z] : P \longmapsto D_z P$.