TP3 : Opérateurs linéaires

Partie 1

Exercice 1. Répondre par vrai ou faux.

1. L'application $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow [-1, 1] : (x, y) \longmapsto \sin(x + y)$ est linéaire.
2. L'application $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \longrightarrow (x + 2y, -z)$ est linéaire.
3. Dans $\mathbb{C}^2$ considéré comme un $\mathbb{R}$ vectoriel, l'application

$$T : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2 : (x, y) \longmapsto (\overline{x + y}, x + iy)$$

est linéaire.

Exercice 2. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, montrer que l'application

$$U : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

est linéaire et qu'il s'agit d'un isomorphisme.

Exercice 3. Soit M la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que l'application $T : \mathbb{C}_3[z] \longrightarrow \mathbb{C}_3^3 : P \longmapsto P(M)$ est linéaire. Donner des bases pour l'image et le noyau.

Exercice 4. On considère l'endomorphisme de $\mathbb{C}_3[z]$

$$T : P \longmapsto D_z((1 - z^2)D_z P(z)) + 6P(z).$$

Déterminer le noyau et l'image de T.

Exercice 5. On pose $P_0(z) = z^2 + z$, $P_1(z) = z^2 + 1$ et $P_2(z) = z + 1$.

1. Montrer que P_0, P_1 et P_2 forment une base de $\mathbb{C}_2[z]$ et donner les composantes de $az^2 + bz + c$ dans cette base.
2. On définit $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}_2[z], \mathbb{C})$ par $T(P_0) = T(P_1) = T(P_2) = 2$. Quelle est l'image de $az^2 + bz + c$?
3. Déterminer $\ker(T)$ et montrer qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que

$$\ker(T) = \{P \in \mathbb{C}_2[z] \mid P(z_0) = 0\}.$$

Exercice 6. Si E est un espace vectoriel de dimension finie et si $T \in \mathcal{L}(E)$, montrer que $\mathrm{im}(T) = \ker(T)$ si et seulement si $T^2 = 0$ et $2\dim(\mathrm{im}(T)) = \dim(E)$.

Exercice 7. Soient E un espace vectoriel réel de dimension 2 et $T \in \mathcal{L}(E)$ tel que $T^2 = -\operatorname{id}$. Montrer que $x \in E \setminus \{0\}$ et $T(x)$ forment une base.

Exercice 8. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $T \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur involutif (i.e. $T^2 = \operatorname{id}$). Démontrer que :

$$\begin{aligned}
\ker(T - \operatorname{id}) &= \operatorname{im}(T + \operatorname{id}),\\
\ker(T + \operatorname{id}) &= \operatorname{im}(T - \operatorname{id}),\\
E &= \ker(T - \operatorname{id}) \oplus \ker(T + \operatorname{id}).
\end{aligned}$$

Réciproquement, montrer qu'à toute décomposition $E = A \oplus B$ correspond une unique involution T telle que $A = \ker(T - \operatorname{id})$ et $B = \ker(T + \operatorname{id})$.

Partie 2

Exercice 1. Montrer que $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \longmapsto (x + 2y, -z)$ est une application linéaire. Donner la matrice associée dans les bases canoniques ainsi que les bases du noyau et de l'image.

Exercice 2. Soient $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $T : \mathbb{C}_2^2 \longrightarrow \mathbb{C}_2^2 : A \longmapsto AM - MA$.

1. Monter que $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}_2^2)$.
2. Trouver des bases et les dimensions du noyau et de l'image.
3. Donner la matrice représentant T dans la base canonique.

Exercice 3. Pour tout $P \in \mathbb{C}_3[z]$, on pose

$$f(P) = P(1 - z) + P(1) - P(z) \text{ et } g(P) = \frac{1}{4!} D_z^3(P(z^2)) - zD_zP(z) + z^3 P(\frac{1}{z}).$$

1. Monter que $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{C}_3[z])$.
2. Donner les matrices qui représentent f et g dans la base canonique. En déduire les matrices qui représentent $f \circ g$ et $g \circ f$.
3. Soit $Q(z) = z(1 - z)$. Calculer $(f \circ g)(Q)$ et $(g \circ f)(Q)$.
4. Donner des bases pour les noyaux et les images de $f \circ g$ et $g \circ f$.
5. A-t-on $\operatorname{rg}(f \circ g) = \operatorname{rg}(g \circ f)$.

Partie 3

Exercice 1. Pour tout $P \in \mathbb{R}_3[x]$, on pose

$$f(P) = \begin{pmatrix} P(1) \\ (D_zP)(1) \end{pmatrix} \text{ et } g(P) = P + (x - 1)D_xP - P(1).$$

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[x], \mathbb{R}^2)$ et que $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[x])$.

2. Donner leur représentations matricielles dans les bases canoniques
$$\mathcal{C} = \{1, x, x^2, x^3\} \text{ et } \mathcal{C}' = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}.$$
3. Même question en remplaçant $\mathcal{C}$ par $\mathcal{B} = \{1, x-1, (x-1)^2, (x--1)^3\}$.
4. Donner les matrices de changement de base entre $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.
5. Donner les base de $\mathrm{im}(f)$, $\ker(f)$, $\mathrm{im}(g)$ et $\ker(g)$.
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer g^n.

Exercice 2 (Septembre 2014)**.** Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs
$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$
et $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que
$$T(u_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } T(u_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Choisir un vecteur u_3 tel que $U = (u_1, u_2, u_3)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$. Dans cette base, donner $\Phi_U(T(u_1))$ et $\Phi_U(T(u_2))$.
2. Soit l'ensemble E formé des vecteurs $v \in \mathbb{R}^3$ tels que $T(u_3) = v$ et que le rang de T vaut 2. Exhiber un élément appartenant à E. Cet ensemble est-il un sous-espace vectoriel ? Si oui, quelle en est la dimension ?
3. Fournir un vecteur w tel que $T(u_3) = w$ et T est un isomorphisme.
4. Si $T(u_3) = (5, 3, -1)^\sim$, représenter matriciellement T dans la base U et donner une base du noyau de T.