TP1 : Polynômes de $\mathbb{C}[z]$

Exercice 1. Effectuer la division euclidienne de $z^5+2z^4+z^3+22z$ par z^2-4z+1.

Exercice 2. Calculer le pgcd de $z^6-7z^4+8z^3-7z+7$ et $3z^5-7z^3+3z^2-7$.

Exercice 3. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}_0$. Calculer le reste de la division du polynôme $(\sin(a)-z\cos(a))^n$ par z^2+1.

Exercice 4. Quels sont les polynômes P de degré au plus égal à 5 tel que $P+10$ soit divisible par $(z+2)^3$ et $P-10$ soit divisible par $(z-2)^3$.

Exercice 5. Déterminer des polynômes U et V tels que

$$(z^7-z-1)U+(z^5+1)V=1.$$

Exercice 6 (Interro mars 2017)**.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$x^3-7x^2-28x+160=0,$$

sachant qu'elle admet une solution négative ainsi que deux solutions positives dont l'une est le double de l'autre.

Exercice 7 (Juin 2012)**.** Le polynôme $z^9+2z^5+3z^4+5z^2+6z+7$ possède-t-il un zéro de module supérieur à 9 ?

Exercice 8 (Interro octobre 2013)**.** Pour chacune des trois applications suivantes, déterminer si il s'agit d'une injection et/ou d'une surjection.
— $f:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}:z\longmapsto z+1+i$,
— $g:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}:z\longmapsto e^{\frac{i\pi}{2}}$,
— $h:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}:z\longmapsto z^2$.

Exercice 9 (Interro février 2013)**.** Soit $n\geq 2$ un entier. Factoriser z^n-1 dans $\mathbb{C}$. En déduire que z^n-1 et $D_z(z^n-1)$ n'ont pas de zéro commun. Déterminer la valeur du produit suivant

$$\prod_{k=1}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}}.$$

Exercice 10. Pour quelles valeurs complexes de a,b,c le polynôme $z^5+2z^4+az^2+bz+c$ est-il divisible par les polynômes $z(z-1)$, $(z-1)^2$ ou z^2+1.

Exercice 11. Soit $n\in\mathbb{N}_0\setminus\{1\}$. Démontrer que 1 est un zéro triple du polynôme

$$z^{2n}-nz^{n+1}+nz^{n-1}-1.$$

Exercice 12. Montrer que le polynôme

$$P(z)=z^{n+1}\cos((n-1)\theta)-z^n\cos(n\theta)-z\cos(\theta)+1$$

est divisible par $z^2-2z\cos(\theta)+1$ et calculer le quotient.