MATH2032 — Séance d'exercices 6
Suites linéaires récurrentes et séries génératrices

Exercice 1. Soit la relation de récurrence

$$x_{n+3} = 3x_{n+2} - x_{n+1} + 3x_n$$

et les conditions initiales $x_0 = x_1 = x_2 = 1$. Exprimer la série génératrice associée sous forme d'une fraction rationnelle. Même question avec les conditions initiales arbitraires x_0, x_1, x_2.

Exercice 2. Soit la fraction rationnelle

$$\frac{1+z}{1-5z+6z^2}.$$

Quelle relation de récurrence linéaire encode-t-elle ? Quelles en sont les conditions initiales ? Sachant que $1 - 5z + 6z^2 = (1-3z)(1-2z)$, décomposer cette fraction rationnelle en fractions simples, donner une formule close pour le $n$ième terme de la suite. (On pourrait aussi refaire l'exercice en exploitant le théorème de structure des solutions du TP précédent.)

Exercice 3. On sait que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = 1, 2, 5, 8, 15, 28, 51, 94, 173, \ldots$ a pour série génératrice

$$\frac{1+z+2z^2}{1-z-z^2-z^3}$$

Donner une relation de récurrence pour

a) la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

b) la suite des sommes partielles

$$\left(\sum_{j=0}^{n} x_j\right)_{n\in\mathbb{N}} = 1, 3, 8, 16, 31, 59, 110, 204, \ldots$$

c) la suite formée des termes d'indice impair $2, 8, 28, 94, 318, \ldots$

Exercice 4. Soit l'équation non homogène

$$x_{n+2} - 3x_{n+1} + x_n = 2n^2 + n - 2$$

Fournir une solution particulière pour les conditions initiales $x_0 = x_1 = 1$. *Calculs longs, on esquissera les grandes étapes.*

Exercice 5. On dispose de pièces de $1, 2, 5$ cents (en nombre suffisant). Utiliser la notion de série génératrice pour compter de combien de façons on peut arranger de telles pièces pour obtenir n cents (l'ordre des pièces n'est pas important) ?

<u>Solutions</u>

- Exercice 1 Partir de

$$s(z) = x_0 + x_1\,z + x_2\,z^2 + z^3 \sum_{n\geq 0} x_{n+3} z^n$$

et en utilisant la relation de récurrence, on trouve

$$\frac{1-2z-z^2}{1-3z+z^2-3z^3}$$

$$\frac{x_0 + (-3x_0 + x_1)z + (x_0 - 3x_1 + x_2)z^2}{1-3z+z^2-3z^3}$$

- Exercice 2

$$x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n, \quad x_0 = 1,\ x_1 = 6$$

$$\frac{1+z}{1-5z+6z^2} = \frac{4}{1-3z} - \frac{3}{1-2z}$$

or

$$\frac{1}{1-3z} = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n z^n \quad \text{et} \quad \frac{1}{1-2z} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n$$

donc, pour tout $n \geq 0$,

$$x_n = 4.3^n - 3.2^n.$$

• Exercice 3. a) La suite satisfait la relation $x_{n+3} = x_{n+2} + x_{n+1} + x_n$.

b) La suite des sommes partielles a pour série génératrice

$$\frac{1}{1-z}.\frac{1+z+2z^2}{1-z-z^2-z^3} = \frac{1+z+2z^2}{1-2z+z^4}$$

donc satisfait la relation $x_{n+4} = 2x_{n+3} - x_n$.

c) En considérant $(s(z) - s(-z))/2$, on finit par trouver la fraction (en divisant par z puis en remplaçant z par $z^{1/2}$)

$$\frac{2(1+z+z^2)}{1-3z-z^2-z^3}$$

la suite satisfait donc la relation $x_{n+3} = 3x_{n+2} + x_{n+1} + x_n$.

• Exercice 4. Si $P(n) = 2n^2 + n - 2$, on trouve

$$P(n+3) = 3P(n+2) - 3P(n+1) + P(n)$$

ainsi,

$$\begin{aligned} x_{n+5} - 3x_{n+4} + x_{n+3} &= P(n+3), \\ -3(x_{n+4} - 3x_{n+3} + x_{n+2}) &= -3P(n+2), \\ 3(x_{n+3} - 3x_{n+2} + x_{n+1}) &= 3P(n+1), \\ -(x_{n+2} - 3x_{n+1} + x_n) &= -P(n). \end{aligned}$$

En sommant, on trouve la relation homogène

$$x_{n+5} - 6x_{n+4} + 13x_{n+3} - 13x_{n+2} + 6x_{n+1} - x_n = 0$$

qui a pour polynôme caractéristique

$$x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 13x^2 + 6x - 1.$$

On retrouve en particulier le fait que ce polynôme se factorise en

$$\underbrace{(x^2-3x+1)}_{\text{polynôme caractéristique récurrence initiale}} \qquad (x^3 \underbrace{-3x^2+3x-1)}_{\text{coefficients de la décomposition}} \quad .$$

Ce polynôme se factorise encore sous la forme

$$\left(x - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)(x-1)^3.$$

Ainsi, la solution recherché est de la forme

$$A\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n + Cn^2 + Dn + E.$$

Sachant que $x_0 = x_1 = 1$, on trouve $x_2 = x_3 = 0$ et $x_4 = 8$. On peut maintenant déterminer les constantes $A, \dots, E$ (système de 5 équations à 5 inconnues), on trouve

$$A = \frac{10-3\sqrt{5}}{5}, \quad B = \frac{10+3\sqrt{5}}{5}$$
$$C = -2, \quad D = 3, \quad E = -3.$$

Autrement dit, une solution particulière est donnée par

$$\frac{1}{5}\left(10-3\sqrt{5}\right)\left(\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{5}\right)\right)^n + \frac{1}{5}\left(10+3\sqrt{5}\right)\left(\frac{1}{2}\left(3-\sqrt{5}\right)\right)^n - 2n^2 + 3n - 3$$

• Exercice 5. L'exposant encode la valeur considérée et le coefficient le nombre de façon d'obtenir cette valeur. Par exemple, si on ne considère que des pièces de 2, on peut obtenir d'une seule façon 4 cents avec des pièces de 2 cents, $1\,z^4$, et on ne peut pas obtenir 5 cents uniquement avec des pièces de 2, $0\,z^5$, etc. La série pour les pièces de 1 cent (on peut faire chaque valeur n d'une seule façon)

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots = \frac{1}{1-z}$$

série pour les pièces de 2 cents (on ne peut obtenir que des valeurs paires, chacune d'une seule façon)

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{2n} = 1 + z^2 + z^4 + z^8 + \cdots = \frac{1}{1-z^2}$$

série pour les pièces de 5 cents (on ne peut obtenir que les multiples de 5, d'une seule façon)

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{5n} = 1 + z^5 + z^{10} + z^{15} + \cdots = \frac{1}{1-z^5}$$

$$\frac{1}{1-z}.\frac{1}{1-z^2}.\frac{1}{1-z^5} = \frac{1}{1-z-z^2+z^3-z^5+z^6+z^7-z^8}$$

qui donne aussi

$$1 + z + 2z^2 + 2z^3 + \mathbf{3z^4} + 4z^5 + 5z^6 + 6z^7 + 7z^8 + 8z^9 + 10z^{10} + 11z^{11} + 13z^{12}$$
$$+14z^{13} + 16z^{14} + 18z^{15} + 20z^{16} + 22z^{17} + 24z^{18} + 26z^{19} + 29z^{20} + \cdots$$

Par exemple, on peut obtenir 4 cents de 3 façons différentes : $1+1+1+1$, $1+1+2$ et $2+2$.