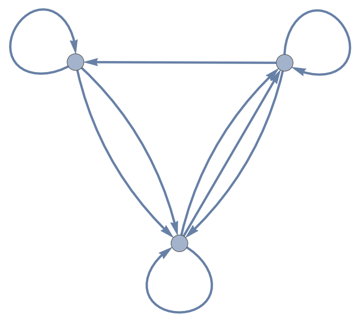
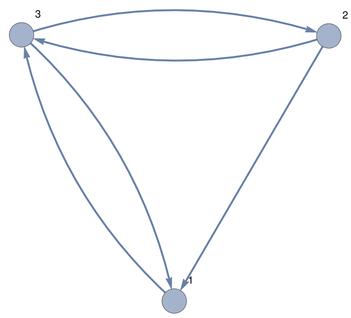
MATH2032 — Séance d'exercices 5
Suites linéaires récurrentes

Exercice 1. Soit le graphe ci-dessous



- Donner une relation de récurrence satisfaite par le nombre de circuits fermés de longueur $n \geq 0$ partant du sommet en haut à gauche (et y revenant).
- Trouver une formule close pour cette suite.
- Quel en est le comportement asymptotique ?

Exercice 2. Soit le graphe ci-dessous



- Donner une relation de récurrence satisfaite par le nombre de chemins de longueur n entre deux sommets quelconques du graphe.
- Trouver une formule close pour cette suite si le sommet de départ est 1 et celui d'arrivée est 3.
- Même question si le sommet de départ est 2 et celui d'arrivée est 3 (*cela permet de montrer la dépendance aux conditions initiales*).

Exercice 3. Trouver une relation de récurrence pour le nombre de mots de longueur n sur l'alphabet $\{a, b\}$ contenant un nombre pair de a et ne contenant pas de facteur formé de deux b consécutifs ?

Exercice 4. Trouver une relation de récurrence pour le nombre de mots de longueur n sur l'alphabet $\{a, b\}$ ne contenant pas de facteur formé de trois b consécutifs ? A une constante multiplicative près, ce nombre se comporte comme $1,8393^n$.

Exercice 5. Le but du jeu des Tours de Hanoï est de déplacer des disques de diamètres 2 à 2 différents d'une tour de «départ» à une tour d'«arrivée». On peut utiliser une tour «intermédiaire». Ceci en un minimum de coups, tout en respectant les règles suivantes :

- on ne peut déplacer plus d'un disque à la fois ;
- on ne peut placer un disque que sur un autre disque plus grand que lui ou sur un emplacement vide.

On suppose que cette dernière règle est également respectée dans la configuration de départ. Quel est le nombre minimum de coups, si on démarre avec n disques ?

Exercice 6. Soit la relation de récurrence linéaire

$$x_{n+3} = 6x_{n+2} - 11x_{n+1} + 6x_n.$$

On considère les conditions intiales $x_0 = 3$, $x_1 = -2$, $x_2 = 2$. Trouver une formule close pour x_n.

Exercice 7. Soit la relation de récurrence linéaire

$$x_{n+3} = 7x_{n+2} - 15x_{n+1} + 9x_n.$$

On considère les conditions intiales $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = -1$. Trouver une formule close pour x_n.

Exercice 8. Soit la relation de récurrence $u_{n+2} = 3u_{n+1} + 10u_n$

- Quelles sont les conditions initiales u_0, u_1 à considerer pour avoir $u_4 = 641$?
- Même question pour avoir $u_{30} = 133046082088845852367$? On sait que

$$133046082088845852367 = \frac{1}{7}5^{30} + \frac{6}{7}(-2)^{30}.$$

Exercice 9. Quel est le nombre maximum L_n de régions du plan (bornées ou non) définies par n droites ? Ainsi, $L_0 = 1$, $L_1 = 2$ et $L_2 = 4$.

Exercice 10. Le problème de Josephus. On considère les entiers de 1 à n placés sur un cercle et on supprime des éléments en commençant par le 2 et en en supprimant un sur deux. Par exemple, pour $n = 10$, on supprime dans l'ordre :

$$2, 4, 6, 8, 10, 3, 7, 1, 9$$

pour qu'il ne reste plus que l'élément 5. On pose alors $J_{10} = 5$. Vérifier que les premières valeurs de $(J_n)_{n\geq 0}$ sont

$$1, 1, 3, 1, 3, 5, 7, 1, 3, 5, 7, 9, \ldots.$$

Montrer que $J_1 = 1$,

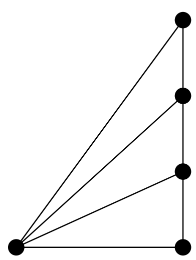
$$J_{2n} = 2J_n - 1$$

et

$$J_{2n+1} = 2J_n + 1.$$

En déduire que si $n = 2^\ell + r$ avec $r < 2^\ell$, alors $J_n = 2r + 1$.

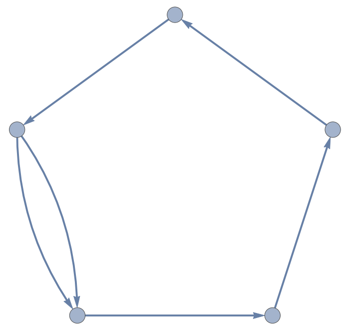
Exercice 11. Un *fan* à $n \geq 2$ sommets est un graphe formé d'une "ligne" de $n - 1$ sommets connectés consécutivement et d'un sommet supplémentaire connecté à tous ceux-ci. Voici un fan à 5 sommets



Si f_n est le nombre de sous-arbres couvrant un fan à n sommets, montrer que

$$f_n = 2f_{n-1} + f_{n-2} + f_{n-3} + \cdots + f_1 + 1.$$

Exercice 12. Quelles sont les valeurs propres de la matrice d'adjacence du graphe suivant, sans en faire le calcul explicite (utiliser le théorème de Perron–Frobenius) ?



- Le graphe est-il primitif ou irréductible ?
- Quelle en est la période ?

Exercice 13. Donner une relation de récurrence d'ordre 3 ayant une solution $(u_n)_{n\geq 0}$ vérifiant
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n^2 3^n}=1.$$

Solutions

- Exercice 1

$$1,1,1,5,17,49,145,437,1313,3937,11809,\ldots$$

$$x_{n+3}=3x_{n+2}-x_{n+1}+3x_n$$

$$\left(\frac{2}{5}+\frac{i}{5}\right)(-i)^n+\left(\frac{2}{5}-\frac{i}{5}\right)i^n+\frac{3^n}{5}$$

Le comportement dominant est donc donné par 3^n.

- Exercice 2

$$x_{n+3}=2x_{n+1}+x_n$$

$$0,1,0,2,1,4,4,9,12,22,33,\ldots$$

$$(-1)^{n+1}-\frac{\left(5-\sqrt{5}\right)\left(\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right)\right)^n}{5\left(\sqrt{5}-3\right)}+\frac{1}{5}\left(5-\sqrt{5}\right)2^{-n-1}\left(1+\sqrt{5}\right)^n$$

qui se réécrit encore comme

$$(-1)^{n+1}+\frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n+\frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,\ldots$$

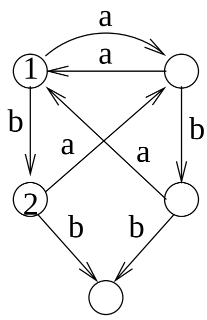
$$\frac{\left(\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)\right)^n}{\sqrt{5}}-\frac{\left(5-3\sqrt{5}\right)\left(\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right)\right)^n}{5\left(\sqrt{5}-3\right)}$$

qui se réécrit aussi comme

$$\frac{\sqrt{5}}{5}\left(1+\sqrt{5}\right)^n-\frac{\sqrt{5}}{5}\left(1-\sqrt{5}\right)^n$$

- Exercice 3

Il faut compter le nombre de chemins de longueur n partant de 1 et aboutissant en 1 ou 2 dans le graphe ci-dessous (*la somme de deux solutions d'une équation de récurrence homogène est encore solution*)



$$1, 1, 1, 3, 4, 6, 11, 17, 27, 45, 72, \ldots$$
$$x_{n+4} = x_{n+2} + 2x_{n+1} + x_n$$

• Exercice 4

$$x_{n+3} = x_{n+2} + x_{n+1} + x_n$$

• Exercice 5

Si T_n désigne le nombre minimum de coups pour déplacer n disques ($n \geq 0$), alors $T_{n+1} = 2T_n+1$ et de là, on trouve $T_n = 2^n - 1$.

• Exercice 6 : $-19\ 2^n + 7\ 3^n + 15$

• Exercice 7 : $(2-n)3^n - 1$

• Exercice 8

- $u_0 = 2, u_1 = 3$
- $u_0 = 1, u_1 = -1$

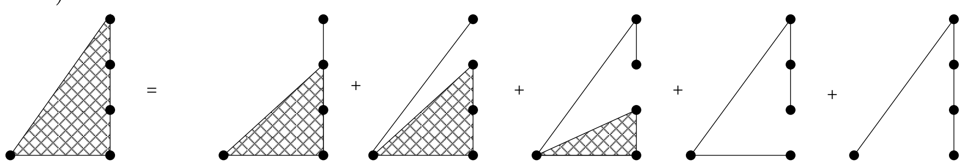
• Exercice 9

Il faut s'apercevoir que lorsqu'on dispose déjà de n droites, on peut tracer une nouvelle droite non parallèle aux précédentes. On divise ainsi $n+1$ régions de la configuration précédente en 2. Autrement dit, $L_{n+1} = L_n + n + 1$. De là,

$$L_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1.$$

• Exercice 11

Tout dépend de comment, dans le sous-arbre couvrant, le sommet du "dessus" est connecté au reste du sous-arbre envisagé. On a schématiquement les possibilités suivantes (une zone achurée fait apparaître les sous-graphe couvrants de la partie correspondante qui est un fan ayant moins de sommets).



Ici, on a donc $f_5 = f_4 + f_4 + f_3 + f_2 + 1$.

• Exercice 12

Les valeurs propres sont les $\sqrt[5]{2}\ e^{2ik\pi/5}$ pour $k = 0, \ldots, 4$. En effet, le graphe est irréductible de période 5. Si x_n compte le nombre de circuit fermés (partant et arrivant en un même sommet), on a $x_{n+5} = 2x_n$.

• Exercice 13

3 doit être zéro triple du polynôme caractéristique donc, $u_{n+3} = 9u_{n+2} - 27u_{n+1} + 27u_n$.