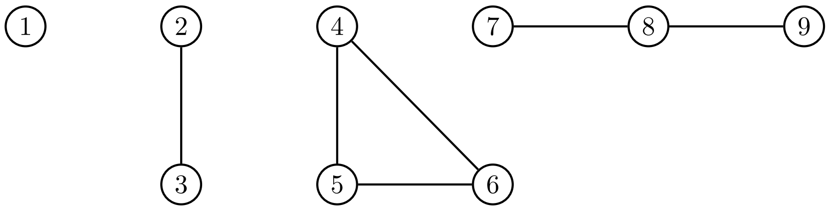
MATH2032 — Séance d'exercices 4
Théorie algébrique des graphes

Exercice 1.
a) Écrire la matrice d'adjacence d'un graphe non orienté en forme de carré (pour une numérotation quelconque de ses sommets) et trouver son polynôme caractéristique.
b) Écrire la matrice d'adjacence du graphe K_n (pour une numérotation quelconque de ses sommets) et trouver son polynôme caractéristique.

Exercice 2. Trouver le plus directement possible le polynôme caractéristique du graphe non orienté suivant.

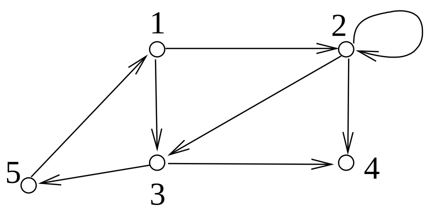


Exercice 3. On considère le graphe K_3. On note A et B deux de ses sommets (distincts). Montrer, au moyen de la matrice d'adjacence du graphe, que le nombre de chemins de longueur n partant de A et arrivant en B vaut

$$\frac{1}{3}(-1)^{n+1} + \frac{2^n}{3}$$

Exercice 4. On considère le graphe biparti complet $K_{3,3}$.
a) Prouver que 0 est une valeur propre de multiplicité 4 de ce graphe.
b) Prouver que 3 est la plus grande valeur propre de ce graphe.
c) Prouver que -3 est une valeur propre de ce graphe.

Exercice 5. On considère le graphe suivant :



a) Donner sa matrice d'adjacence A.
b) Donner les éléments de la diagonale de A^3. Justifier.
c) Quel est le nombre minimum d'arc(s) à ajouter pour rendre le graphe fortement connexe ? Fournir ce(s) arc(s).
d) Donner un chemin simple de longueur maximale. Justifier.
e) Avec les notations du cours, si ce graphe est vu comme un ensemble de pages Web et de liens, donner les matrices H (hyperliens) et S (stochastique) utilisées dans l'algorithme du PageRank. Comment calculerait-on la matrice G utilisée par Google (une formule détaillée suffit) ?

Exercice 6. Trouver le nombre de sous-arbres couvrants du graphe biparti complet $K_{3,3}$.

Exercice 7. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Représenter le graphe orienté D ayant M comme matrice d'adjacence.
b) Déterminer les composantes fortement connexes du graphe D.
c) Renuméroter les sommets de D de telle sorte que la matrice d'adjacence correspondante soit bloc-triangulaire composée (supérieure ou inférieure).
d) Déterminer les valeurs propres de D. Exprimer, en fonction de celles-ci, le nombre de chemins fermés de longueur n dans D.
e) Prouver que la matrice M n'est ni primitive, ni irréductible. Est-il possible de remplacer un unique élément de la matrice M pour la rendre irréductible ? Si oui, énumérer toutes les possibilités. Même question pour la rendre primitive.
f) Si c_n dénote le nombre de chemins de longueur n joignant les deux sommets de D connectés par un chemin simple de longueur maximale, prouver que c_n satisfait, pour tout $n \geq 0$ la relation

$$c_{n+4} = 2\,c_{n+3} + c_{n+2} - 2\,c_{n+1} - c_n.$$

Exercices supplémentaires

Exercice 8. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Représenter le graphe orienté D ayant M comme matrice d'adjacence.
(b) Déterminer les composantes fortement connexes du graphe D.
(c) Prouver que la matrice M n'est ni primitive, ni irréductible. Est-il possible d'ajouter un unique arc au graphe D pour rendre la matrice correspondante irréductible ? Si oui, énumérer toutes les possibilités. Même question pour la rendre primitive.
(d) En supposant les sommet de D numérotés de façon compatible avec M, montrer que, pour tout n, les nombres de chemins de longueur n joignant 3 à 2, 4 à 3, 2 à 4 sont égaux. (Bonus: montrer que cette quantité est aussi égale au nombre de chemins de longueur n joignant 2 à 1.)

Exercice 9. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Représenter le graphe orienté D ayant M comme matrice d'adjacence.
(b) Prouver que la matrice M est primitive. Est-il possible de supprimer un unique arc au graphe D pour rendre la matrice correspondante irréductible mais non primitive ?
(c) Soit α la valeur propre de Perron de M. Quels renseignements peut-on tirer de M^n quand n tend vers l'infini ? (Un énoncé théorique suffit pour répondre à la question.)
(d) En supposant les sommets de D numérotés de façon compatible avec M, montrer que, pour tout $n \geq 4$, le nombre de chemins fermés partant et arrivant en 1 de longueur $n + 4$ est égal à la somme des nombres de chemins fermés partant et arrivant en 1 de longueur n et ceux de longueur $n + 1$. En déduire le nombre de tels chemins fermés de longueur 16 passant par 1.