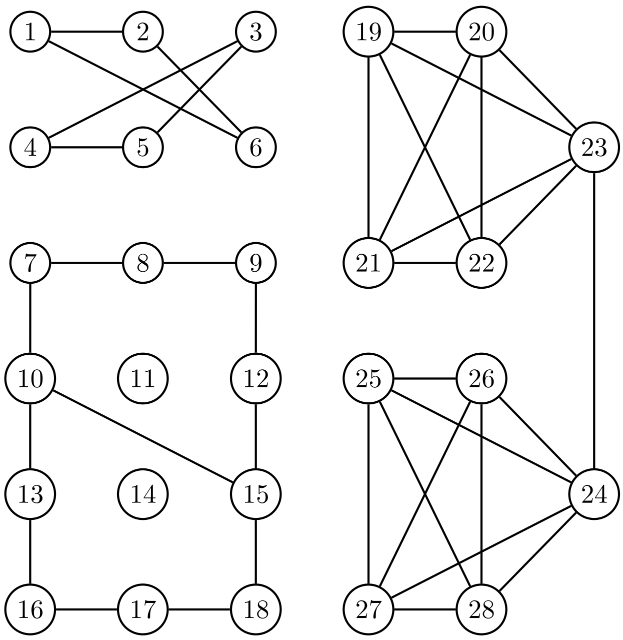
MATH2032 — Séance d'exercices 3
Graphes et chemins eulériens et hamiltoniens

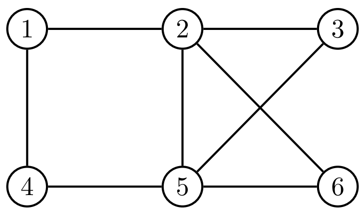
**Exercice 1.** On considère les quinze dominos $\{i, j\}$ où $i$ et $j$ sont des entiers vérifiant $0 < i < j < 7$. Est-il possible de juxtaposer ces dominos sur une ligne en respectant la règle principale de tout bon jeu de dominos qui se respecte ? Si oui, dessiner un exemple. Si non, expliquer pourquoi.

**Exercice 2.**
a) Parmi les trois graphes non orientés suivants, lesquels sont eulériens ?
b) Parmi ceux qui ne le sont pas, lesquels possèdent néanmoins un chemin eulérien ? Déterminer le nombre de chemins eulériens de chacun d'entre eux.




**Exercice 3.** Trouver toutes les valeurs entières de $a, b, c$ telles que $0 < a \leq b \leq c$ et que le graphe triparti complet $K_{a,b,c}$ possède un chemin eulérien mais pas de circuit eulérien.

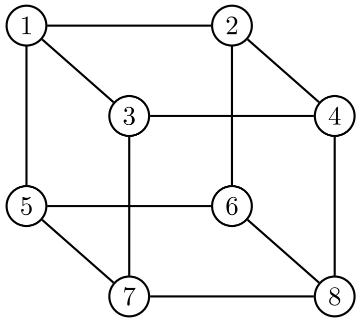
**Exercice 4.** Trouver la fermeture du graphe non orienté suivant.



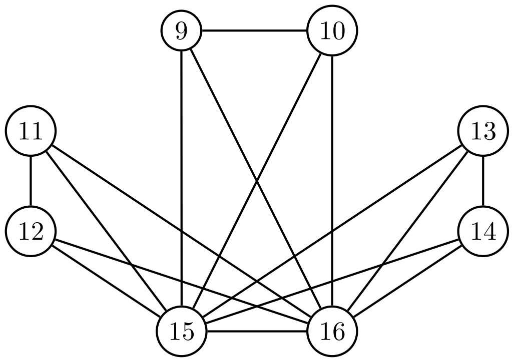

**Exercice 5.** Pour chacun des graphes simples non orientés suivants, donner un exemple d'existence ou prouver l'inexistence.
a) Un graphe eulérien et non hamiltonien.
b) Un graphe hamiltonien d'au moins 3 nœuds et avec une arête de coupure.

**Exercice 6.** Lesquels des quatre graphes suivants sont hamiltoniens ?

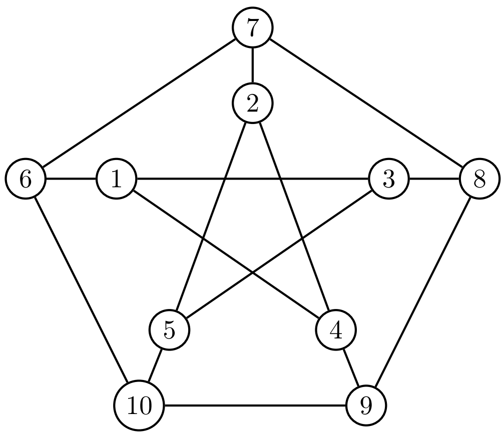
(a)




(b)




(c) Le graphe de Petersen :



Exercices supplémentaires

**Exercice 7.** Démontrer que le graphe biparti complet $K_{m,n}$ est hamiltonien si et seulement si $m = n$.

Pour rappel, on écrit $m \equiv n \pmod{()} r$ si $m - n$ est divisible par $r$. Autrement dit, si $m$ et $n$ sont égaux à un multiple de $r$ près.

**Exercice 8.** On considère le graphe qui est simple, orienté, qui a exactement 12 nœuds notés $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{11}$ et qui est tel qu'il existe un arc partant du nœud $v_i$ et arrivant au nœud $v_j$ si et seulement si $j \equiv i + 3 \pmod{12}$ ou $j \equiv i + 4 \pmod{12}$.
(a) Prouver que ce graphe est fortement connexe.
(b) Ce graphe est-il eulérien ?
(c) Quel est le nœud à partir duquel il est nécessaire d'emprunter le plus d'arcs pour atteindre le nœud $v_0$ ?
(d) Prouver que ce graphe n'est pas hamiltonien.

**Exercice 9.** On considère un graphe simple, orienté, de 30 nœuds notés $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{29}$ et tel qu'il existe un arc partant du nœud $v_i$ et arrivant au nœud $v_j$ si et seulement si il existe $k \in \{6, 15\}$ tel que $j \equiv i + k \pmod{30}$. On note $G$ ce graphe et $H$ sa composante fortement connexe à laquelle le nœud $v_0$ appartient.
(a) Montrer que le graphe $G$ possède trois composantes fortement connexes.
(b) Le graphe $H$ est-il eulérien ?
(c) Le graphe $H$ est-il hamiltonien ?
(d) Calculer la valeur du diamètre du graphe $H$.