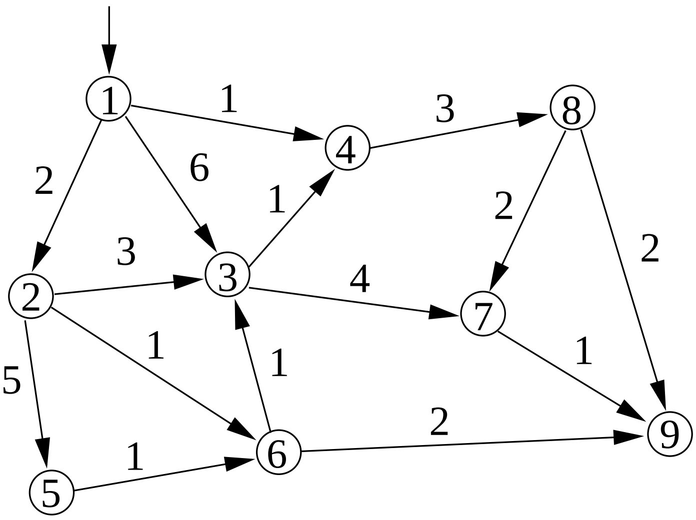
MATH2032 — Séance d'exercices 2
Arbres, algorithme de Dijkstra, planarité

Exercice 1. Appliquer l'algorithme de Dijkstra permettant d'obtenir un chemin de poids minimal du sommet 1 vers les autres sommets du graphe. On considérera les itérations successives de l'algorithme en fournissant les valeurs des variables $T(v)$ et $C(v)$ pour chaque sommet $v \neq 1$ (poids actuel et chemin réalisé pour le sommet v).

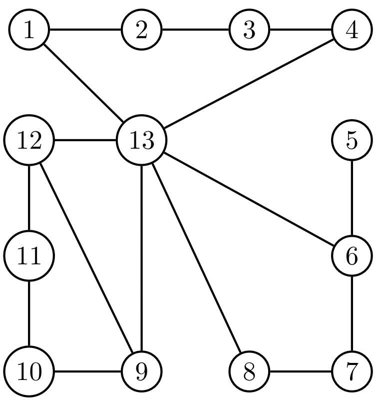


Exercice 2. Trouver tous les arbres ayant exactement 7 sommets, à isomorphisme près.

Exercice 3. Soient k et n des entiers strictement positifs. Trouver le nombre d'arêtes et la somme des degrés des sommets d'une forêt de k arbres et n sommets.

Exercice 4. Trouver tous les arbres dont le complémentaire n'est pas connexe.

Exercice 5. Trouver le nombre de sous-arbres couvrants du graphe non orienté ci-dessous.



Exercice 6. Soit C_{3n}, l'ensemble des arêtes de n sous-graphes triangulaires deux à deux disjoints du graphe complet K_{3n}. Le graphe $G_n = K_{3n} - C_{3n}$ est-il planaire?

Exercice 7. Prouver qu'il n'existe pas de graphe simple non orienté planaire qui possède exactement 6 sommets dont 3 au moins sont de degré 5.

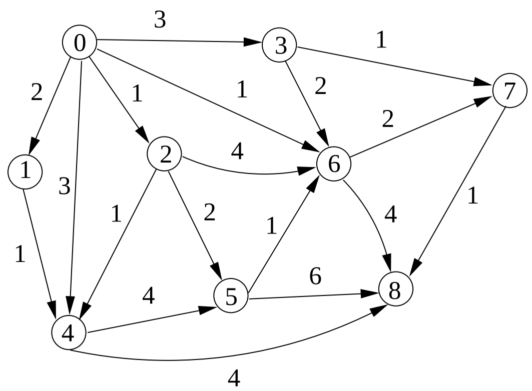
Exercice 8. On considère une représentation planaire d'un graphe ayant exactement 300 faces, toutes triangulaires. Déterminer les nombres A d'arêtes et S de sommets de ce graphe.

Exercice 9. Un ballon de football peut être vu comme un polyèdre convexe dont chaque face est hexagonale ou pentagonale. Sachant que chaque sommet de ce polyèdre appartient à exactement deux faces hexagonales et une face pentagonale, déterminer les nombres S de sommets, A d'arêtes, H de faces hexagonales et P de faces pentagonales de ce polyèdre.

Exercice 10. On considère un graphe et une de ses représentations planaires dont chaque face est triangulaire et possède un sommet de degré 3 et deux sommets de degré 6. Déterminer le nombre N_3 de sommets de degré 3, le nombre N_6 de sommets de degré 6, le nombre A d'arêtes et le nombre F de faces de ce graphe, en justifiant soigneusement chaque mise en équation. Dessiner une représentation planaire de ce graphe.

Exercices supplémentaires

Exercice 11. Appliquer l'algorithme de Dijkstra (en rappelant la signification des variables utilisées) au graphe ci-dessous pour obtenir des chemins de poids minimal du sommet 0 vers les autres sommets.



Exercice 12. Soit G un graphe simple ayant n sommets et $n-1$ arêtes qui n'est pas un arbre. (On suppose qu'un sommet isolé est un arbre "trivial".)

(a) Prouver que G n'est pas connexe
(b) Prouve que G possède une composante qui est un arbre.
(c) Prouver que G possède une composante qui n'est pas un arbre.
(d) Prouver que si G possède exactement deux composantes connexes, alors celle qui n'est pas un arbre possède exactement un cycle.

Exercice 13. Soit C_{4n}, l'ensemble des arêtes de n sous-graphes isomorphes à K_4 et deux à deux disjoints du graphe complet K_{4n}. Le graphe $G_n = K_{4n} - C_{4n}$ est-il planaire?

Exercice 14. On considère une représentation planaire d'un graphe. Sachant que chaque face de celle-ci est un quadrilatère ayant exactement un sommet de degré 3, deux sommets de degré 4 et un sommet de degré 5, touver son nombre d'arêtes.