MATH2032 — Séance d'exercices 1
graphes, chemins, connexité

Exercice 1. Lors d'une réception dans laquelle il y a au moins deux personnes, toutes les personnes qui se connaissent se sont serrées la main. Montrer qu'il existe deux personnes qui ont serré la main au même nombre de personnes.

Exercice 2.
a) Construire le graphe biparti complet $K_{2,3}$ et compter son nombre d'arêtes.
b) Combien le graphe biparti complet $K_{m,n}$ possède-t-il d'arêtes ? $(m, n \geq 1)$
c) Construire le graphe triparti complet $K_{2,3,2}$ et compter son nombre d'arêtes.
d) Combien le graphe triparti complet $K_{l,m,n,}$ possède-t-il d'arêtes ? $(l, m, n \geq 1)$

Exercice 3. Prouver que les graphes non orientés suivants n'existent pas.
a) Un graphe simple qui est 3-régulier (c'est-à-dire dont chaque sommet est de degré 3) et qui possède exactement 7 sommets.
b) Un graphe ayant un nombre impair de sommets, tous de degré impair.
c) Un graphe simple ayant 8 sommets et 29 arêtes.

Exercice 4. Pour chacun des graphes simples non orientés suivants, donner un exemple d'existence ou prouver l'inexistence.
a) Un graphe biparti 3-régulier de 8 sommets.
b) Un graphe biparti 4-régulier de 11 sommets.

Exercice 5.
a) Existe-t-il un groupe de 11 personnes tel que chaque membre du groupe connaisse exactement 3 autres personnes de ce groupe ?
b) Même question mais avec un groupe de 8 personnes (et chaque membre du groupe connaît exactement 3 autres membres du groupe).
Pour les deux points précédents, en cas de réponse affirmative, représenter un graphe illustrant la situation. Le graphe obtenu est-il toujours connexe ?

Exercice 6. Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté et non connexe. Montrer que son complémentaire, le graphe $\overline{G} = (V, (V \times V) \backslash E)$ est connexe. Que peut-on dire de diam$(\overline{G})$?

Exercice 7. Soit k un nombre entier strictement positif. Soit G un graphe simple, non orienté, connexe, fini et d'au moins deux sommets. On suppose que dans chaque triplet de sommets de G, on peut toujours choisir deux sommets dont la distance est inférieure ou égale à k. Prouver qu'il est possible de colorier les sommets de G avec deux couleurs, rouge et bleu, de manière à ce que les deux conditions suivantes soient satisfaites simultanément :

- la distance entre deux sommets rouges est toujours inférieure ou égale à $2k$,
- la distance entre deux sommets bleus est toujours inférieure ou égale à $2k$.

Exercice 8. Soit $G = (V, E)$ un graphe simple non orienté non vide. Soit $k = \min_{x \in V} \deg(x)$.

a) Prouver que G possède un chemin simple de longueur k.

b) Prouver que G possède un circuit simple de longueur au moins $k + 1$ si k vaut au moins 2.

Exercices supplémentaires

Exercice 9. À une réception, n couples sont invités ($n \geq 1$). Certains invités se serrent la main, mais personne ne sert la main à son conjoint. L'un des invités, nommé I, demande à chaque autre personne combien de poignées de main elle a données. Il obtient $2n-1$ réponses différentes. Combien la femme de monsieur I a-t-elle donné de poignées de main ? Combien monsieur I a-t-il donné de poignées de main ?

Exercice 10. Soit G un graphe simple non orienté possédant m arêtes $e_1, \ldots, e_m$. On définit le *graphe ligne* $L(G)$ comme le graphe ayant m sommets $v_1, \ldots, v_m$ et l'arête $\{v_i, v_j\}$ appartient à $L(G)$ si et seulement si les arêtes e_i et e_j de G sont adjacentes (i.e., ont une extrémité commune).
a) Représenter le graphe ligne du graphe complet K_4, du graphe biparti complet $K_{2,3}$ et d'un cycle à 6 sommets.
b) Donner une expression pour le nombre d'arêtes de $L(G)$ en fonction des degrés des sommets de G.
c) Montrer que si G est un graphe simple k-régulier (i.e., chaque sommet est de degré k), alors $L(G)$ est $(2k-2)$-régulier.

Exercice 11. Un *tournoi* est un graphe simple et orienté $G = (V, E)$ tel que pour toute paire $\{u, v\}$ de sommets distincts, exactement l'un des deux arcs (u, v) ou (v, u) appartient à E. Un tournoi est *transitif* si, pour tous sommets u, v, w, si $(u, v) \in E$ et $(v, w) \in E$, alors $(u, w) \in E$. Un *roi* d'un tournoi est sommet r à partir duquel on peut atteindre tout autre sommet de V par un chemin de longueur au plus 2.

(1) Donner un exemple de tournoi transitif et un exemple de tournoi non transitif, tous deux avec 4 sommets. Dans chaque cas, exhiber un roi du tournoi.
(2) Soit v un sommet d'un tournoi $G = (V, E)$. Comparer $d^+(v) + d^-(v)$ et $\#V$.
(3) Démontrer qu'un tournoi est transitif si et seulement s'il est sans cycle.
(4) Démontrer qu'un tournoi possède au moins un roi (indice : considérer un sommet r de demi-degré sortant maximum et les ensembles $\mathrm{succ}(r)$ et $\mathrm{pred}(r)$).

Exercice 12. Un *matching parfait* d'un graphe simple (non-orienté) $G = (V, E)$ est un sous-ensemble $M \subseteq E$ tel que tout sommet de V est l'extrémité d'exactement une arête de M.

(a) Montrer que K_n possède un matching parfait si et seulement si n est pair.
(b) Combien de matchings parfaits distincts peut-on trouver dans le graphe biparti complet $K_{3,3}$?
(c) Prouver qu'un arbre A a un matching parfait si et seulement si, pour chaque sommet v de A, le graphe $A - v$ possède une seule composante connexe ayant un nombre impair de sommets.
(d) On considère un jeu entre deux joueurs A et B. On donne un graphe simple connexe G. Le joueur A débute la partie en choisissant un sommet. Les deux joueurs jouent alternativement en choisissant un sommet non choisi précédemment avec la contrainte de choisir un sommet voisin du dernier sommet sélectionné par l'autre joueur (autrement dit, A et B construisent ensemble un chemin). Le premier joueur incapable de jouer (il n'y a plus de sommet valide disponible) perd la partie. Montrer que si G a un matching parfait, alors B dispose d'une stratégie gagnante (quels que soient les sommets choisis par A, B pourra toujours gagner).

Exercice 13. Par définition, le rayon rad(G) d'un graphe $G = (V, E)$ non orienté connexe non vide est

$$\mathrm{rad(G) = \min_{a\in V} \max_{b\in V} d(a, b).}$$

a) Montrer que tout graphe non orienté connexe non vide G vérifie les inégalités suivantes :

$$\mathrm{rad(G) \leq diam(G) \leq 2rad(G).}$$

b) Pour quelles valeurs de $n \geq 1$ existe-t-il un graphe non orienté connexe qui possède n sommets et dont le diamètre vaut exactement le rayon ?
c) Pour quelles valeurs de $n \geq 1$ existe-t-il un graphe non orienté connexe qui possède n sommets et dont le diamètre vaut le double du rayon ?

Exercice 14. Trouver les composantes simplement connexes et fortement connexes du graphe orienté suivant.