**Répétitions de théorie des graphes**
**2018–2019**

*Par convention, tous les graphes de ces notes sont supposés finis.*

Chapitre 1

**Exercice 1.** Il existe quatre groupes sanguins :
- $AB$ pour les personnes ayant des antigènes $A$ et $B$,
- $A$ pour les personnes ayant des antigènes $A$ mais pas d'antigènes $B$,
- $B$ pour les personnes ayant des antigènes $B$ mais pas d'antigènes $A$,
- $O$ pour les personnes n'ayant ni d'antigènes $A$ ni d'antigènes $B$.
Il existe également deux rhésus sanguins :
- positif $(+)$,
- négatif $(-)$.
On admet que les seuls interdits biologiques pour recevoir du sang sont les suivants :
- recevoir du sang possédant un antigène dont on est dépourvu,
- recevoir du sang ayant un rhésus positif si on est rhésus négatif.

(a) Tracer le graphe orienté dont $\{AB+, AB-, A+, A-, B+, B-, O+, O-\}$ est l'ensemble des sommets et dont les arcs désignent les possibilités de donner du sang sans violer les interdits biologiques.
(b) Donner le demi-degré sortant $d^+(v)$ et le demi-degré entrant $d^-(v)$ de chaque nœud $v$.
(c) Donner l'ensemble des successeurs succ(v) et l'ensemble des prédécesseurs pred(v) de chaque nœud $v$.

**Exercice 2.** Un fermier se promène avec trois êtres vivants : un loup, une chèvre et une salade. Il doit traverser une rivière mais il ne peut le faire qu'avec au plus un seul des trois à la fois. De plus, le fermier ne peut quitter une rive en y laissant la chèvre, sauf si celle-ci y reste seule (sinon, en l'absence du fermier, la chèvre mangerait la salade ou serait mangée par le loup). A l'aide d'un graphe non orienté et simple, expliquer comment le fermier peut s'y prendre pour se retrouver sur l'autre rive en le moins de traversées possible.

**Exercice 3.** Lors d'une réception dans laquelle il y a au moins deux personnes, toutes les personnes qui se connaissent se sont serrées la main. Montrer qu'il existe deux personnes qui ont serré la main au même nombre de personnes.

**Exercice 4.** A une réception, $n$ couples sont invités ($n \geq 1$). Certains invités se serrent la main, mais personne ne sert la main à son conjoint. L'un des invités, nommé $I$, demande à chaque autre personne combien de poignées de main elle a données. Il obtient $2n-1$ réponses différentes. Combien la femme de monsieur $I$ a-t-elle donné de poignées de main ? Combien monsieur $I$ a-t-il donné de poignées de main ?

**Exercice 5.**
(a) Construire le graphe biparti complet $K_{2,3}$ et compter son nombre d'arêtes.
(b) Combien le graphe biparti complet $K_{m,n}$ possède-t-il d'arêtes ? $(m, n \geq 1)$
(c) Construire le graphe triparti complet $K_{2,3,2}$ et compter son nombre d'arêtes.
(d) Combien le graphe triparti complet $K_{l,m,n}$, possède-t-il d'arêtes ? $(l, m, n \geq 1)$

**Exercice 6.** Prouver que les graphes non orientés suivants n'existent pas.
(a) Un graphe simple qui est 3-régulier (c'est-à-dire dont chaque nœud est de degré 3) et qui possède exactement 7 nœuds. *(Juin 2007, question 0a)*
(b) Un graphe ayant un nombre impair de nœuds, tous de degré impair. *(Juin 2006, question 1a)*

(c) Un graphe simple ayant 8 nœuds et 29 arêtes. *(Juin 2006, question 1b)*

**Exercice 7.** Pour chacun des graphes simples non orientés suivants, donner un exemple d'existence ou prouver l'inexistence.

(a) Un graphe biparti 3-régulier de 8 nœuds.
(b) Un graphe biparti 4-régulier de 11 nœuds.

**Exercice 8.**

(a) Existe-t-il un groupe de 11 personnes tel que chaque membre du groupe connaisse exactement 3 autres personnes de ce groupe ?
(b) Même question mais avec un groupe de 8 personnes (et chaque membre du groupe connaît exactement 3 autres membres du groupe).
Pour les deux points précédents, en cas de réponse affirmative, représenter un graphe illustrant la situation. Le graphe obtenu est-il toujours connexe ? *(Août 2015, question 1)*

**Exercice 9.** Soit $G$ un graphe simple non orienté possédant $m$ arêtes $e_1, \ldots, e_m$. On définit le *graphe ligne* $L(G)$ comme le graphe ayant $m$ sommets $v_1, \ldots, v_m$ et l'arête $\{v_i, v_j\}$ appartient à $L(G)$ si et seulement si les arêtes $e_i$ et $e_j$ de $G$ sont adjacentes (i.e., ont une extrémité commune).

(a) Représenter le graphe ligne du graphe complet $K_4$, du graphe biparti complet $K_{2,3}$ et d'un cycle à 6 sommets.
(b) Donner une expression pour le nombre d'arêtes de $L(G)$ en fonction des degrés des sommets de $G$.
(c) Montrer que si $G$ est un graphe simple $k$-régulier (i.e., chaque sommet est de degré $k$), alors $L(G)$ est $(2k-2)$-régulier.
*(Août 2015, question 3)*

**Exercice 10.** Un *tournoi* est un graphe simple et orienté $G = (V, E)$ tel que pour toute paire $\{u, v\}$ de sommets distincts, exactement l'un des deux arcs $(u, v)$ ou $(v, u)$ appartient à $E$. Un tournoi est *transitif* si, pour tous sommets $u, v, w$, si $(u, v) \in E$ et $(v, w) \in E$, alors $(u, w) \in E$. Un *roi* d'un tournoi est sommet $r$ à partir duquel on peut atteindre tout autre sommet de $V$ par un chemin de longueur au plus 2.

(a) Donner un exemple de tournoi transitif et un exemple de tournoi non transitif, tous deux avec 4 sommets. Dans chaque cas, exhiber un roi du tournoi.
(b) Soit $v$ un sommet d'un tournoi $G = (V, E)$. Comparer $d^+(v) + d^-(v)$ et $\#V$.
(c) Démontrer qu'un tournoi est transitif si et seulement s'il est sans cycle.
(d) Démontrer qu'un tournoi possède au moins un roi (indice : considérer un sommet $r$ de demi-degré sortant maximum et les ensembles $\mathrm{succ}(r)$ et $\mathrm{pred}(r)$).

*(Janvier 2016, question 1)*

**Exercice 11.** Soit $G$ un graphe simple ayant $n$ sommets et $n-1$ arêtes qui n'est pas un arbre. (On suppose qu'un sommet isolé est un arbre "trivial".)

(a) Prouver que $G$ n'est pas connexe
(b) Prouver que $G$ possède une composante qui est un arbre.
(c) Prouver que $G$ possède une composante qui n'est pas un arbre.
(d) Prouver que si G possède exactement deux composantes connexes, alors celle qui n'est pas un arbre possède exactement un cycle.

*(Janvier 2017, question 1)*

**Exercice 12.** Un *matching parfait* d'un graphe simple (non-orienté) $G = (V, E)$ est un sous-ensemble $M \subseteq E$ tel que tout sommet de $V$ est l'extrémité d'exactement une arête de $M$.

(a) Montrer que $K_n$ possède un matching parfait si et seulement si $n$ est pair.
(b) Combien de matchings parfaits distincts peut-on trouver dans le graphe biparti complet $K_{3,3}$ ?

(c) Prouver qu'un arbre $A$ a un matching parfait si et seulement si, pour chaque sommet $v$ de $A$, le graphe $A - v$ possède une seule composante connexe ayant un nombre impair de sommets.

(d) On considère un jeu entre deux joueurs A et B. On donne un graphe simple connexe $G$. Le joueur A débute la partie en choisissant un sommet. Les deux joueurs jouent alternativement en choisissant un sommet non choisi précédemment avec la contrainte de choisir un sommet voisin du dernier sommet sélectionné par l'autre joueur (autrement dit, A et B construisent ensemble un chemin). Le premier joueur incapable de jouer (il n'y a plus de sommet valide disponible) perd la partie. Montrer que si $G$ a un matching parfait, alors B dispose d'une stratégie gagnante (quels que soient les sommets choisis par A, B pourra toujours gagner).

*(Août 2017, question 1)*

**Exercice 13.** Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté et non connexe. Montrer que son complémentaire, le graphe $\overline{G} = (V, (V \times V) \backslash E)$ est connexe. Que peut-on dire de $\text{diam}(\overline{G})$ ?

**Exercice 14.** Soit $k$ un nombre entier strictement positif. Soit $G$ un graphe simple, non orienté, connexe, fini et d'au moins deux nœuds. On suppose que dans chaque triplet de nœuds de $G$, on peut toujours choisir deux nœuds dont la distance est inférieure ou égale à $k$. Prouver qu'il est possible de colorier les nœuds de $G$ avec deux couleurs, rouge et bleu, de manière à ce que les deux conditions suivantes soient satisfaites simultanément :

- la distance entre deux nœuds rouges est toujours inférieure ou égale à $2k$,
- la distance entre deux nœuds bleus est toujours inférieure ou égale à $2k$.

**Exercice 15.** On considère un graphe simple non orienté de 7 nœuds, tous de degré supérieur ou égal à 3.

(a) Prouver que ce graphe est connexe.

(b) Prouver que ce graphe n'a pas ses sept nœuds de degré exactement 3.

**Exercice 16.** Par définition, le rayon $\text{rad}(G)$ d'un graphe $G = (V, E)$ non orienté connexe non vide est

$$\text{rad(G)} = \min_{\text{a} \in \text{V}} \max_{\text{b} \in \text{V}} \text{d(a, b)}.$$

(a) Montrer que tout graphe non orienté connexe non vide $G$ vérifie les inégalités suivantes :

$$\text{rad(G)} \leq \text{diam(G)} \leq 2\text{rad(G)}.$$

(b) Pour quelles valeurs de $n \geq 1$ existe-t-il un graphe non orienté connexe qui possède $n$ nœuds et dont le diamètre vaut exactement le rayon ?

(c) Pour quelles valeurs de $n \geq 1$ existe-t-il un graphe non orienté connexe qui possède $n$ nœuds et dont le diamètre vaut le double du rayon ?

**Exercice 17.** Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté connexe non vide. Soit $k = \max_{x \in V} \deg(x)$. Prouver l'implication

$$k \geq 3 \Rightarrow \#V < \frac{k(k-1)^{\text{rad(G)}}}{k-2}.$$

**Exercice 18.** Soit $G = (V, E)$ un graphe simple non orienté non vide. Soit $k = \min_{x \in V} \deg(x)$.

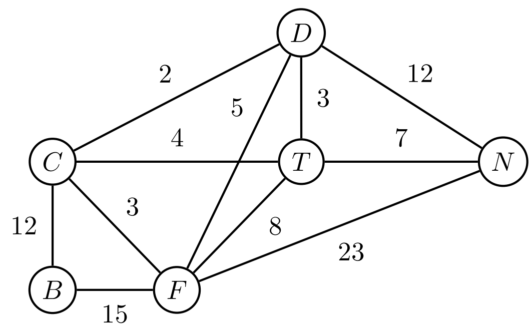
(a) Prouver que $G$ possède un chemin simple de longueur $k$.

(b) Prouver que $G$ possède un circuit simple de longueur au moins $k + 1$ si $k$ vaut au moins 2.

**Exercice 19.** Soit $G$ un graphe non orienté connexe qui possède au moins un circuit simple de longueur non nulle. On désigne par $f(G)$ la longueur du plus petit circuit simple de longueur non nulle de $G$.

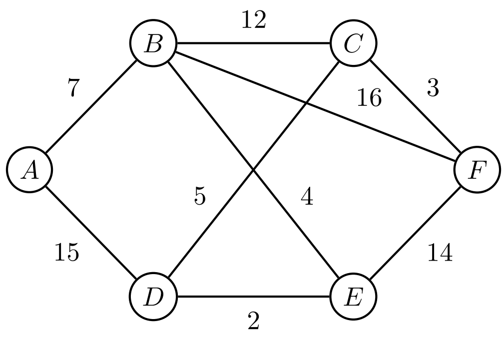
(a) Prouver que $f(G) \leq 2\ \mathrm{diam}(G) + 1$.
(b) Trouver un exemple réalisant l'égalité $f(G) = 2\ \mathrm{diam}(G) + 1$.

**Exercice 20.** Un groupe d'amis organise une randonnée dans les Alpes. On a représenté par le graphe ci-dessous les sommets B, C, D, F, T, N par lesquels ils peuvent choisir de passer. Une arête entre deux sommets coïncide avec l'existence d'un chemin entre les deux sommets. Les distances en kilomètres entre chaque sommet sont indiquées sur le graphe. S'ils se trouvent au sommet B et souhaitent se rendre au sommet N, pouvez-vous leur indiquer un chemin dans le graphe qui minimise la distance du trajet?

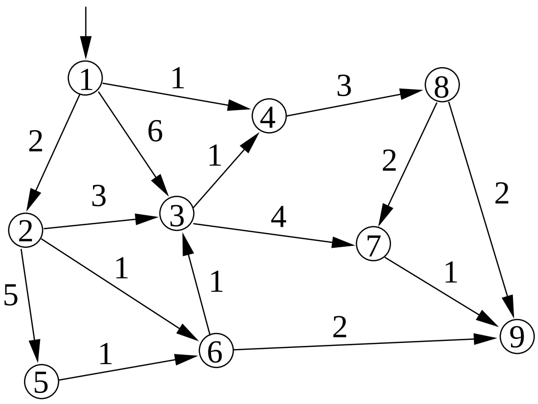



**Exercice 21.** Une agence de voyages organise différentes excursions dans une région du monde et propose la visite de sites incontournables, nommés A, B, C, D, E et F. Ces excursions sont résumées sur le graphe ci-dessous dont les sommets désignent les sites, les arêtes représentent les routes pouvant être empruntées pour relier deux sites et le poids des arêtes désigne le temps de transport en heures entre chaque site. Un touriste désire aller du site A au site F en limitant au maximum les temps de transport.

(a) En utilisant un algorithme, déterminer la plus courte chaîne reliant le sommet A au sommet F.
(b) En déduire le temps de transport minimal pour aller du site A au site F.

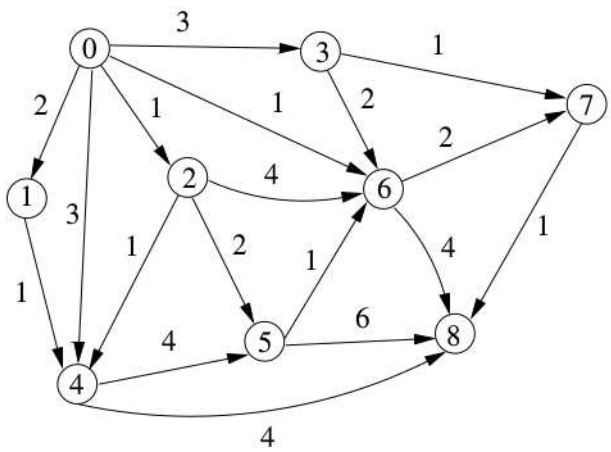



**Exercice 22.** Appliquer l'algorithme de Dijkstra permettant d'obtenir un chemin de poids minimal du sommet 1 vers les autres sommets du graphe. On considérera les itérations successives de l'algorithme en fournissant les valeurs des variables $T(v)$ et $C(v)$ pour chaque sommet $v \neq 1$ (poids actuel et chemin réalisé pour le sommet $v$).




*(Août 2016, question 1)*

**Exercice 23.** Appliquer l'algorithme de Dijkstra (en rappelant la signification des variables utilisées) au graphe ci-dessous pour obtenir des chemins de poids minimal du sommet 0 vers les autres sommets.

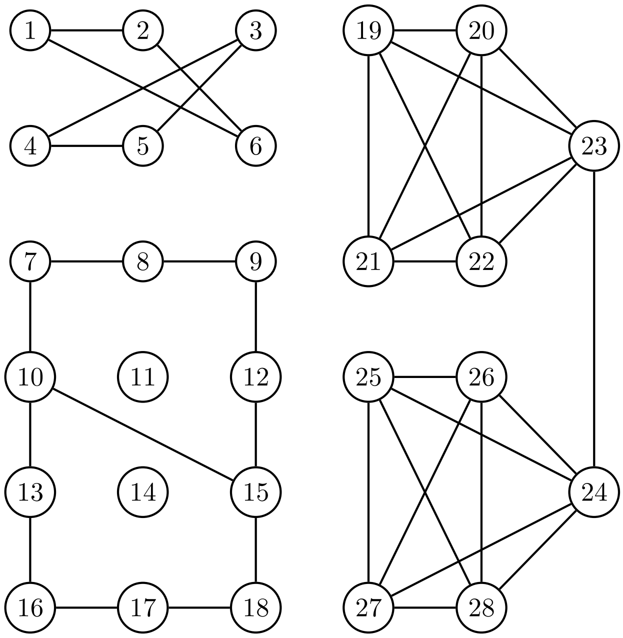



*(Août 2017, question 3)*

**Exercice 24.** On considère les quinze dominos $\{i, j\}$ où $i$ et $j$ sont des entiers vérifiant $0 < i < j < 7$. Est-il possible de juxtaposer ces dominos sur une ligne en respectant la règle principale de tout bon jeu de dominos qui se respecte ? Si oui, dessiner un exemple. Si non, expliquer pourquoi.

**Exercice 25.**

(a) Parmi les trois graphes non orientés suivants, lesquels sont eulériens ?
(a) Parmi ceux qui ne le sont pas, lesquels possèdent néanmoins un chemin eulérien ? Déterminer le nombre de chemins eulériens de chacun d'entre eux.

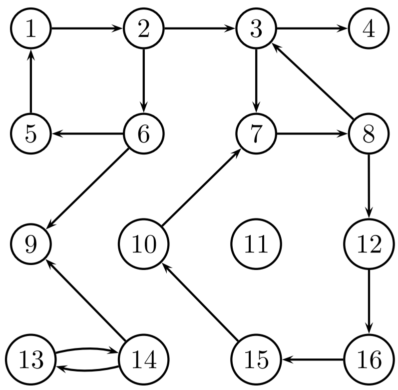



**Exercice 26.** Prouver qu'il n'existe pas de 1-graphe $G = (V, E)$ non orienté, non-connexe, de 2006 nœuds, qui est eulérien et dont le complémentaire $\overline{G} = (V, (V \times V)\backslash E)$ est également eulérien. *(Juin 2006, question 1c)*

**Exercice 27.** On considère un 1-graphe $G = (V, E)$ non orienté non connexe possédant $n$ nœuds, $n$ étant un entier au moins égal à 3. On suppose que chaque composante connexe de $G$ est un graphe eulérien. Pour quelles valeurs de $n$ le graphe $\overline{G} = (V, (V \times V)\backslash E)$ est-il eulérien ?

**Exercice 28.** Trouver toutes les valeurs entières de $a, b, c$ telles que $0 < a \leq b \leq c$ et que le graphe triparti complet $K_{a,b,c}$ possède un chemin eulérien mais pas de circuit eulérien.

**Exercice 29.** Trouver les composantes simplement connexes et fortement connexes du graphe orienté suivant.



**Exercice 30.** Prouver qu'il n'existe pas de graphe $G$ non orienté connexe possédant une et une seule arête de coupure $e$ et tel qu'une composante connexe du sous-graphe $G - \{e\}$ possède au moins une arête de coupure. *(Juin 2006, question 1d)*

**Exercice 31.** On considère un graphe non orienté connexe $G = (V, E)$, deux nœuds $a$ et $b$, et une partie $S$ de $V \backslash \{a, b\}$ séparant $a$ et $b$. Montrer qu'aucun sous-ensemble propre de $S$ ne sépare $a$ et $b$ si et seulement si tout point de $S$ possède un voisin dans la composante connexe de $G - S$ à laquelle $a$ appartient et un voisin dans la composante connexe de $G - S$ à laquelle $b$ appartient.

**Exercice 32.** On considère un graphe non orienté connexe $G = (V, E)$, deux nœuds $a$ et $b$, et une partie $S$ de $V \backslash \{a, b\}$ séparant $a$ et $b$. On note $C_a$ la composante connexe de $a$ dans $G - S$ et $C_b$ la composante connexe de $b$ dans $G - S$. On considère une autre partie $S'$ de $V \backslash \{a, b\}$ séparant $a$ et $b$. On note $C'_a$ et $C'_b$ les composantes connexes respectivement de $a$ et de $b$ dans $G - S'$. Montrer que les ensembles $X$ et $Y$ définis par

$$X = (S \cap C'_a) \cup (S \cap S') \cup (S' \cap C_a)$$
$$Y = (S \cap C'_b) \cup (S \cap S') \cup (S' \cap C_b)$$

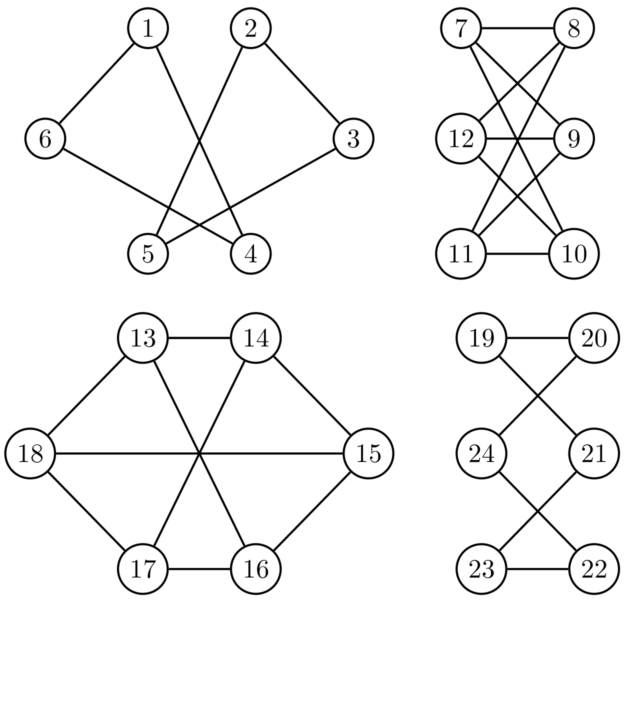
séparent a et b.

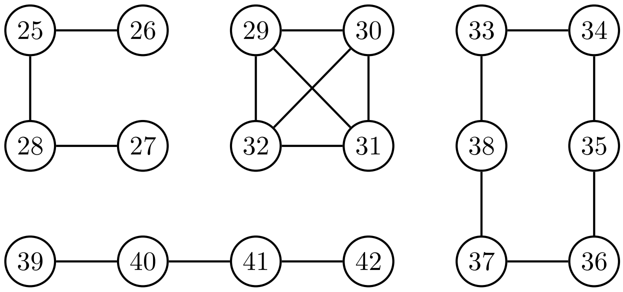
**Exercice 33.** Construire un graphe simple, non orienté et 3-régulier possédant une arête de coupure. Déterminer le nombre minimum de sommets qu'un tel graphe possède (justifier votre réponse).
*(Janvier 2015, question 1)*

**Définition.** Deux graphes non orientés $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$ sont *isomorphes* s'il existe (au moins) une bijection $f : V_1 \to V_2$ telle que $\{x, y\} \in E_1 \Leftrightarrow \{f(x), f(y)\} \in E_2$.

**Exercice 34.** Montrer que sur tout ensemble de graphes, la relation binaire $G_1$ *est isomorphe à* $G_2$ est une relation d'équivalence.

**Exercice 35.** Regrouper par classe d'isomorphie les huit graphes non orientés suivants.





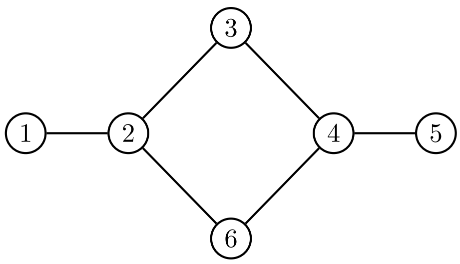

**Exercice 36.** Trouver tous les graphes simples non orientés eulériens de 5 nœuds, à isomorphisme près.

**Exercice 37.** Déterminer, à isomorphisme près, tous les graphes non orientés :

(a) ayant 4 nœuds, tous de degré 1,
(b) ayant 5 nœuds, tous de degré 2,
(c) complets et dont le nombre d'arêtes est un multiple du nombre de nœuds,
(d) bipartis complets ayant exactement 12 arêtes.

**Exercice 38.**

(a) Combien le graphe non orienté ci-dessous possède-t-il de sous-graphes connexes non orientés ?
(b) Combien le graphe non orienté ci-dessous possède-t-il de sous-graphes connexes non orientés, à isomorphisme près ?




**Exercice 39.**

(a) Trouver tous les arbres ayant exactement 6 nœuds, à isomorphisme près.
(b) Trouver tous les arbres ayant exactement 7 nœuds, à isomorphisme près.
(c) Trouver tous les arbres ayant exactement 8 nœuds, à isomorphisme près.

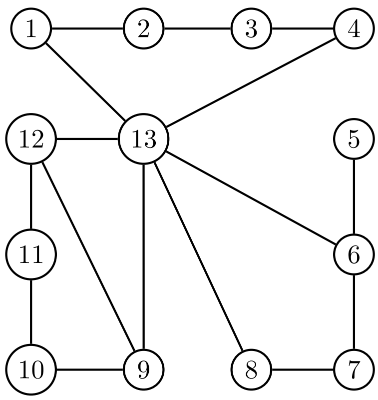
**Exercice 40.** Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 4.

(a) Trouver combien d'arbres de $n$ nœuds sont de diamètre égal à 2, à isomorphisme près.
(b) Trouver combien d'arbres de $n$ nœuds sont de diamètre égal à 3, à isomorphisme près.

**Exercice 41.** Soient $k$ et $n$ des entiers strictement positifs. Trouver le nombre d'arêtes et la somme des degrés des nœuds d'une forêt de $k$ arbres et $n$ nœuds.

**Exercice 42.** Trouver tous les arbres dont le complémentaire n'est pas connexe.

**Exercice 43.** Trouver le nombre de sous-arbres couvrants du graphe non orienté ci-dessous.




**Exercice 44.** Soit $G = (V, E)$ un arbre de diamètre $k \geq 1$.

(a) Prouver qu'il existe deux nœuds $u$ et $v$ tels que $\deg(u) = \deg(v) = 1$ et que $d(u, v) = k$.
(b) Prouver que $\text{rad}(G) = \lceil \frac{k}{2} \rceil$. *(Interro 22/03/2007)*

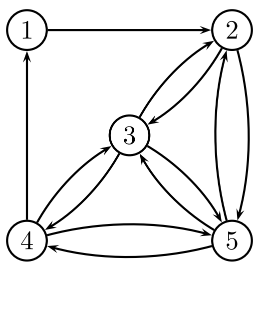
**Exercice 45.** On considère un arbre fini non orienté $G$ et deux de ses sous-arbres $A$ et $B$ ayant au moins un sommet commun. Le sous-graphe $(A \cap B)$ de $G$, constitué des nœuds communs et des arêtes communes de $A$ et de $B$, est-il nécessairement un arbre? *(Août 2009, question 2)*

**Exercice 46.** Soient $d$ un nombre entier strictement positif et $\mathcal{G}$ l'ensemble des graphes (finis) non orientés connexes de diamètre $d$ (on travaille à isomorphisme près). Déterminer la valeur suivante

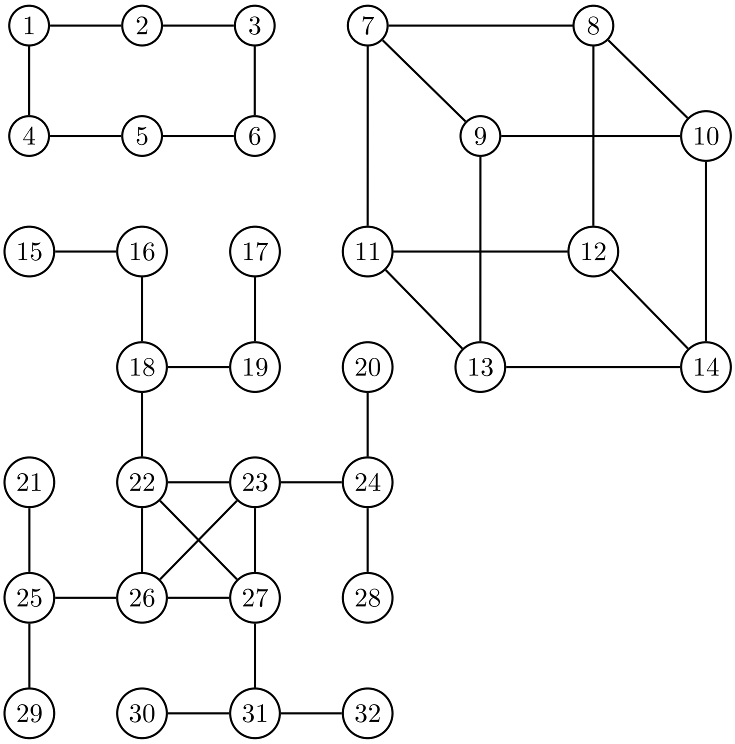
$$\max_{G \in \mathcal{G}} \min\{\text{diam(T) : T est un arbre de recouvrement de G}\}.$$

**Exercice 47.** Construire deux arbres non isomorphes ayant chacun 12 sommets dont 3 exactement sont de degré 3 et un unique sommet de degré 2.
*(Août 2016, question 3)*

**Exercice 48.** Sachant que $h : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$ est un automorphisme sur le graphe orienté dessiné ci-dessous, décrire explicitement $h$. Il est nécessaire de décrire toutes les solutions possibles.



**Exercice 49.** Trouver le nombre d'automorphismes de chacun des trois graphes suivants.



**Exercice 50.** Soient $m$ et $n$ deux entiers strictement supérieurs à 2. On nomme $G$ et $H$ deux graphes non orientés en forme de polygone de respectivement $m$ et $n$ côtés. Pour quelles valeurs de $m$ et de $n$ existe-t-il un homomorphisme du graphe $G$ sur le graphe $H$ ?

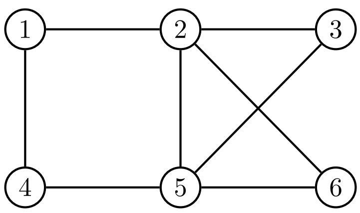
**Exercice 51.** Dessiner trois graphes simples non orientés deux à deux non isomorphes qui possèdent chacun exactement 20 automorphismes. *(Juin 2008, question 1)*

**Exercice 52.** Décrire un graphe fini simple orienté ayant exactement 2009 automorphismes.

(a) Avec le nombre d'arcs que vous voulez.
(b) Avec au plus 90 arcs.
(c) Avec au plus 62 arcs.

**Exercice 53.** Pour quelles valeurs du nombre entier naturel $n$ existe-t-il un graphe simple orienté ayant exactement $n$ automorphismes ? Même question dans le cas de graphes non orientés.

**Exercice 54.** Trouver la fermeture du graphe non orienté suivant.



**Exercice 55.** Quel est le nombre maximum d'arêtes que peut posséder un graphe simple non orienté non complet mais égal à sa fermeture ? La réponse sera donnée en fonction du nombre de nœuds du graphe.

**Exercice 56.** Pour chacun des graphes simples non orientés suivants, donner un exemple d'existence ou prouver l'inexistence.

(a) Un graphe eulérien et non hamiltonien.
(b) Un graphe hamiltonien d'au moins 3 nœuds et avec une arête de coupure.

**Exercice 57.** Démontrer que le graphe biparti complet $K_{m,n}$ est hamiltonien si et seulement si $m = n$.
*(Août 2016, question 2)*

**Exercice 58.** Trente et un étudiants désirent se réunir une fois par jour autour d'une table ronde. Aucun d'entre eux n'accepte d'avoir le même voisin plus d'une fois. Combien de jours au maximum peuvent-ils se réunir ? *(Juin 2008, question 2)*

**Exercice 59.** On considère le graphe qui est simple, orienté, qui a exactement 12 nœuds notés $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{11}$ et qui est tel qu'il existe un arc partant du nœud $v_i$ et arrivant au nœud $v_j$ si et seulement si $j \equiv i + 3 \pmod{12}$ ou $j \equiv i + 4 \pmod{12}$.

(a) Prouver que ce graphe est fortement connexe.
(b) Ce graphe est-il eulérien?
(c) Quel est le nœud à partir duquel il est nécessaire d'emprunter le plus d'arcs pour atteindre le nœud $v_0$ ?
(d) Prouver que ce graphe n'est pas hamiltonien.

*(Juin 2007, question 1)*

**Exercice 60.** On considère un graphe simple, orienté, de 30 nœuds notés $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{29}$ et tel qu'il existe un arc partant du nœud $v_i$ et arrivant au nœud $v_j$ si et seulement si il existe $k \in \{6, 15\}$ tel que $j \equiv i+k \pmod{30}$. On note $G$ ce graphe et $H$ sa composante fortement connexe à laquelle le nœud $v_0$ appartient.

(a) Montrer que le graphe $G$ possède trois composantes fortement connexes.
(b) Le graphe $H$ est-il eulérien ?
(c) Le graphe $H$ est-il hamiltonien ?
(d) Calculer la valeur du diamètre du graphe $H$.
(e) Combien le graphe $H$ possède-t-il d'automorphismes ?

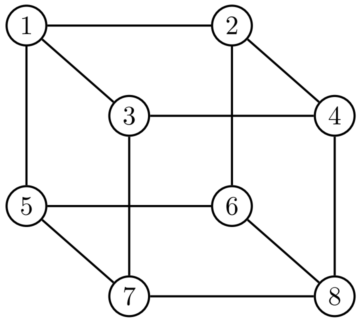
*(Août 2008, question 1)*

**Exercice 61.** Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 3. Quel est, en fonction de $n$, le nombre maximum d'arêtes que peut avoir un graphe simple non orienté non hamiltonien de $n$ nœuds ? Justifier.

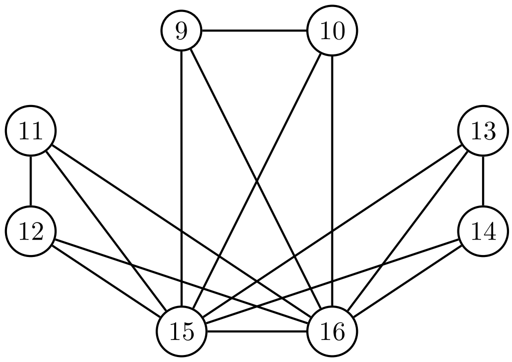
**Exercice 62.** Soit $G = (V, E)$ un graphe simple non orienté connexe tel que $\#V \geq 3$. Notons $\overline{G}$ le graphe complémentaire de $G$. Prouver que si $\overline{G}$ n'a pas de sous-graphe triangulaire, alors $G$ a un chemin hamiltonien.

**Exercice 63.** Lesquels des quatre graphes suivants sont hamiltoniens ?

(a)

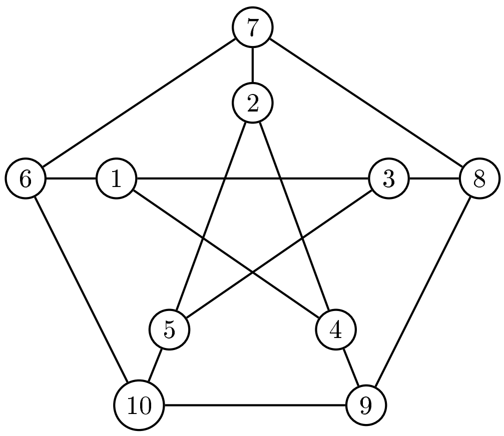


(b)



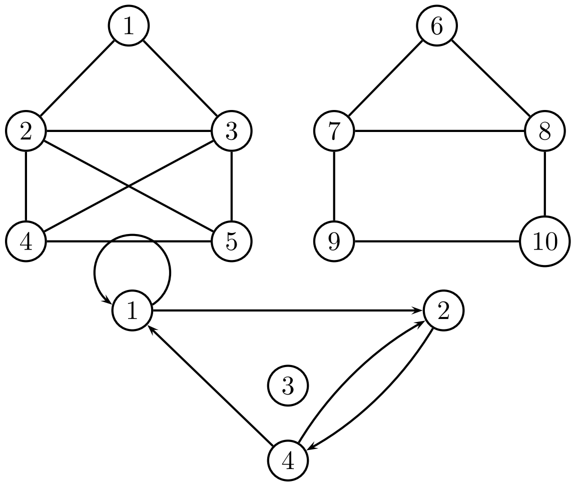
(c) Il s'agit du graphe non orienté dont l'ensemble des nœuds est $\{0,1,2\}^3$ et pour lequel le nœud $x = (x_1, x_2, x_3)$ et le nœud $y = (y_1, y_2, y_3)$ sont reliés par une arête si et seulement si deux des trois nombres $|x_1 - y_1|$,$|x_2 - y_2|$ et $|x_3 - y_3|$ sont nuls et que le troisième vaut 1.

(d) Il s'agit du graphe de Petersen.



## Chapitre 2

**Exercice 64.** En respectant la numérotation des sommets, écrire la matrice d'adjacence des deux multi-graphes suivants, le premier étant non orienté, et le second étant orienté.

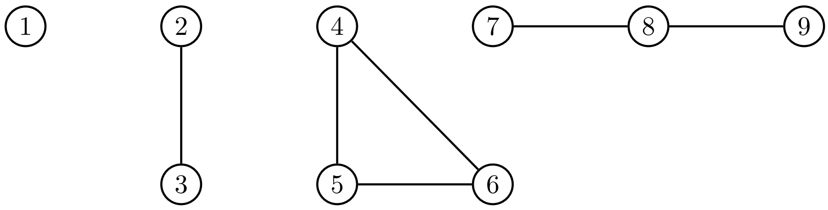


**Exercice 65.** Prouver qu'il n'existe pas de graphe simple non orienté dont la matrice d'adjacence (pour une numérotation quelconque des nœuds) possède une ligne qui n'est la transposée d'aucune de ses colonnes. *(Juin 2007, question 0b)*

**Exercice 66.**

(a) Ecrire la matrice d'adjacence d'un graphe non orienté en forme de carré (pour une numérotation quelconque de ses nœuds) et trouver son polynôme caractéristique.
(b) Ecrire la matrice d'adjacence du graphe $K_n$ (pour une numérotation quelconque de ses nœuds) et trouver son polynôme caractéristique.

**Exercice 67.** Trouver le plus directement possible le polynôme caractéristique du graphe non orienté suivant.



**Exercice 68.** A isomorphisme près, trouver tous les graphes simples non orientés ayant un polynôme caractéristique de la forme $\lambda^4 + a\lambda^2 - 4\lambda + b$ où $a$ et $b$ sont des nombres entiers.

**Exercice 69.** Prouver qu'il n'existe pas de graphe simple non orienté connexe ayant un polynôme caractéristique de la forme $\lambda^6 - 6\lambda^4 - 4\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c$ où $a$, $b$ et $c$ sont des nombres entiers.

**Exercice 70.** On considère un graphe simple non orienté non complet ayant un polynôme caractéristique de la forme $-\lambda^7 + x\lambda^5 + a\lambda^4 + b\lambda^3 + c\lambda^2 + d\lambda + e$ où $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ et $x$ sont des nombres entiers. Quelles valeurs extrêmes $x$ peut-il atteindre ?

**Exercice 71.** On considère le graphe $K_3$. On note $A$ et $B$ deux de ses nœuds (distincts). Trouver, au moyen de la matrice d'adjacence du graphe, le nombre de chemins de longueur $n$ partant du nœud $A$ et arrivant au nœud $B$.

**Exercice 72.** Trouver, au moyen de sa matrice d'adjacence, le nombre de chemins fermés de longueur $k$ du graphe complet $K_n$.

**Exercice 73.** On considère le graphe biparti complet $K_{3,3}$.

(a) Prouver que 0 est une valeur propre de multiplicité 4 de ce graphe.
(b) Prouver que 3 est la plus grande valeur propre de ce graphe.
(c) Prouver que $-3$ est une valeur propre de ce graphe.
(d) Prouver que si les valeurs propres de ce graphe sont $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$, alors le nombre de chemins fermés de longueur $n$ ($n \geq 1$) partant d'un sommet donné de ce graphe est $(\lambda_1^n + \lambda_2^n + \lambda_3^n + \lambda_4^n + \lambda_5^n + \lambda_6^n)/6$.
(e) Déterminer exactement le nombre de chemins ouverts de longueur 8 partant d'un sommet donné de ce graphe.

*Suggestion : De simples arguments théoriques peuvent suffire et éviter des calculs aux points a,b,c. Rappel : Un chemin $(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ de longeur $n$ ($n \geq 1$) est fermé si $v_0 = v_n$ et ouvert si $v_0 \neq v_n$. (Juin 2006, question 2)*

**Exercice 74.**

(a) Trouver le nombre de chemins de longueur 8 du graphe simple non orienté triparti complet $K_{2,2,2}$.
(b) Trouver le nombre de chemins fermés de longueur $n$ ($n \geq 1$) du graphe simple non orienté triparti complet $K_{2,2,2}$.

**Exercice 75.** On considère le graphe non orienté biparti complet $K_{a,b}$ où $a$ et $b$ sont deux nombres entiers strictement positifs.

(a) Combien existe-t-il d'automorphisme(s) sur ce graphe ?
(b) Si on note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{a+b}$ les valeurs propres de ce graphe, prouver qu'il possède exactement $\lambda_1^n + \lambda_2^n + \cdots + \lambda_{a+b}^n$ chemins fermés de longueur $n$ ($n \geq 1$).
(c) Prouver que 0 est une valeur propre de ce graphe si $a+b > 2$, et déterminer sa multiplicité.
(d) Déterminer le nombre de chemins fermés de longueur 1 et le nombre de chemins fermés de longueur 2 de ce graphe, puis les dernières valeurs propres de ce graphe.

**Exercice 76.** Soit $n$ un entier strictement positif. On considère le graphe simple non orienté triparti complet $K_{n,n,n}$. On note $A$ la matrice d'adjacence de ce graphe (pour une numérotation quelconque de ses sommets).

(a) Que vaut la somme des multiplicités algébriques des valeurs propres non nulles de la matrice $A$ ?
(b) Calculer la somme des $(3n)$ valeurs propres de la matrice $A$.
(c) Calculer la somme des carrés des $(3n)$ valeurs propres de la matrice $A$.
(d) Calculer la somme des cubes des $(3n)$ valeurs propres de la matrice $A$.
(e) Déterminer toutes les valeurs propres de la matrice $A$.

*L'ordre des réponses aux points (a), (b), (c), (d), (e) est libre. Obtenir la réponse du point (e) rend les autres points très faciles à traiter, mais il est probablement globalement plus simple de déduire la réponse du point (e) à partir des réponses des quatre autres points. (août 2008, question 2)*

**Exercice 77.** Soit $n$ un paramètre entier strictement positif, en fonction duquel les réponses doivent être discutées. Soit $C_{2n}$ un ensemble de $n$ arêtes, deux à deux sans sommet commun, du graphe non orienté complet $K_{2n}$. Soit $G_n$ le graphe défini, à isomorphisme près, par $G_n = K_{2n} - C_{2n}$.

(a) Combien le graphe $G_n$ possède-t-il d'automorphismes ? Combien de composantes connexes le graphe $G_n$ possède-t-il? Est-il eulérien? Est-il hamiltonien?
(b) Trouver les valeurs propres du graphe $G_n$ avec leur multiplicité.

**Exercice 78.** Soit $n$ un paramètre entier strictement positif, en fonction duquel les réponses doivent être discutées. Soit $C_{3n}$ l'ensemble des arêtes de $n$ sous-graphes triangulaires disjoints du graphe non orienté complet $K_{3n}$. Soit $G_n$ le graphe défini par $G_n = K_{3n} - C_{3n}$.

(A) Trouver toutes les valeurs propres du graphe $G_n$ avec leur multiplicité.
(Ba) Combien le graphe $G_n$ possède-t-il d'automorphismes ?
(Bb) Le graphe $G_n$ est-il hamiltonien?

*(Mai 2009, questions 1A, 1Ba, 1Bb)*

**Exercice 79.** Soit $n$ un paramètre entier strictement positif, en fonction duquel les réponses doivent être discutées. Soit $C_{4n}$ l'ensemble des arêtes de $n$ sous-graphes, isomorphes au graphe complet $K_4$ et deux à deux disjoints, du graphe non orienté complet $K_{4n}$. Soit $G_n$ le graphe défini par $G_n = K_{4n} - C_{4n}$. Pour $n > 1$, le graphe $G_n$ est donc isomorphe au graphe $n$-parti complet $K_{\underbrace{4,\ldots,4}_{n \text{ indices}}}$.

(a) Combien le graphe $G_n$ possède-t-il d'arêtes ?
(b) Le graphe $G_n$ est-il hamiltonien?
(c) Trouver toutes les valeurs propres du graphe $G_n$ avec leur multiplicité.

*(Août 2009, questions 1a, 1b, 1e)*

**Exercice 80.** Soient $k$ et $n$ deux entiers strictement positifs. On considère un graphe simple non orienté $k$-régulier de $n$ noeuds pour lequel il existe toujours un et un seul chemin de longueur inférieure ou égale à 2 entre deux noeuds distincts. On note $A$ la matrice d'adjacence de ce graphe (pour une numérotation quelconque de ses sommets).

(a) Donner la plus grande valeur propre de la matrice $A$ et un des vecteurs propres relatifs à cette valeur propre.
(b) Prouver que tous les éléments de la matrice $A^2 + A + (1-k)I$ sont des 1.
(c) Prouver qu'un graphe vérifiant les conditions de l'énoncé ne peut exister que si $n = k^2 + 1$.
(d) Dessiner un graphe vérifiant les conditions de l'énoncé pour $(k, n) = (3, 10)$.

*(Juin 2007, question 2)*

**Exercice 81.** Soient $k$ et $n$ deux entiers strictement positifs. On considère un graphe simple non orienté $k$-régulier de $n$ noeuds pour lequel il existe toujours un et un seul chemin simple de longueur inférieure ou égale à 3 entre deux noeuds distincts. On note $A$ la matrice d'adjacence de ce graphe (pour une numérotation quelconque de ses sommets).

(a) Dessiner un graphe vérifiant les conditions de l'énoncé pour $(k, n) = (2, 7)$.
(b) Quelle est, en fonction de $k$, la plus grande valeur propre de la matrice $A$ ?
(c) Prouver que chaque ligne de la matrice $A^3 + A^2 + A + (1-k)I$ possède exactement $k$ composantes égales à $2k$ et $(n-k)$ composantes égales à 1.
(d) Prouver qu'un graphe vérifiant les conditions de l'énoncé ne peut exister que si $n = k^3 - k^2 + k + 1$.
(e) Dans un graphe vérifiant les conditions de l'énoncé pour $k = 10$, quelle est, en moyenne, la distance entre les deux extrémités d'un chemin de longueur 4 ?

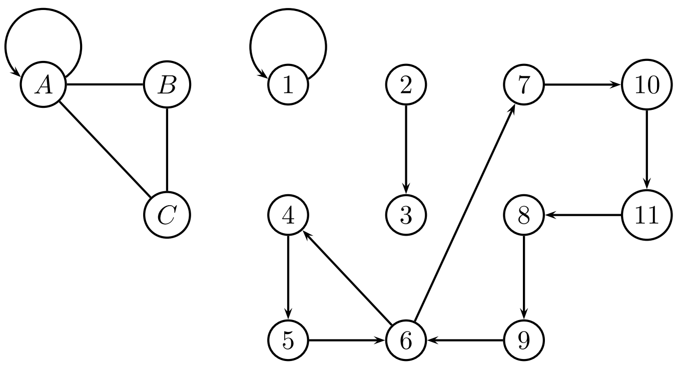
*(a,b,c,d (mais pas e) : Juin 2008, question 3)*

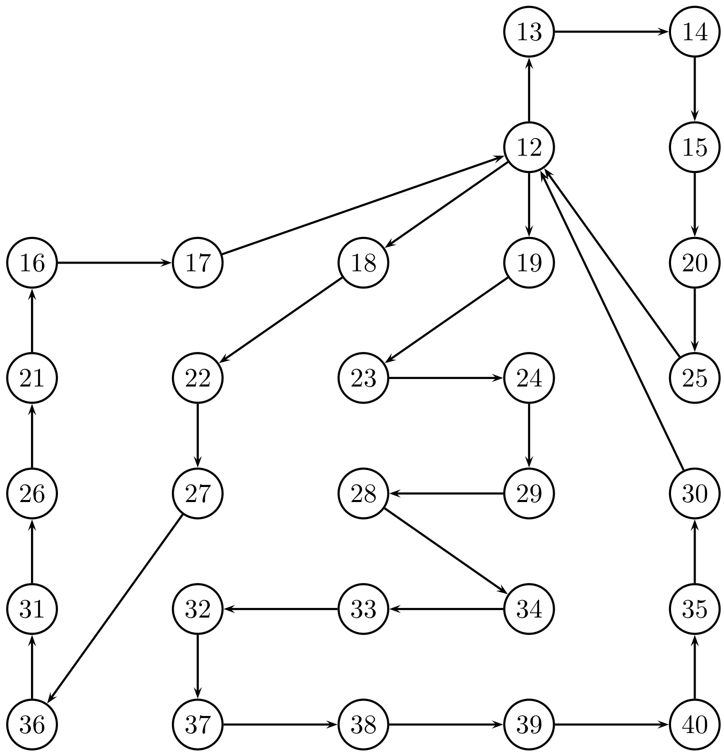
**Exercice 82.** On considère le graphe de Petersen et sa matrice d'adjacence $A$ (pour une numérotation quelconque des sommets de ce graphe).

(a) Donner la plus grande valeur propre de la matrice A, ainsi qu'un de ses vecteurs propres.
(b) Démontrer que toutes les coordonnées de la matrice $A^2 + A - 2I$ sont égales à 1.
(c) Diagonaliser la matrice $A^2 + A - 2I$ et en déduire que chaque valeur propre de la matrice $A$ appartient à l'ensemble $\{-2, 1, 3\}$.

(d) Déterminer la multiplicité de chaque valeur propre de la matrice $A$.
(e) Déterminer le nombre de chemins fermés de longueur 100 du graphe de Petersen.

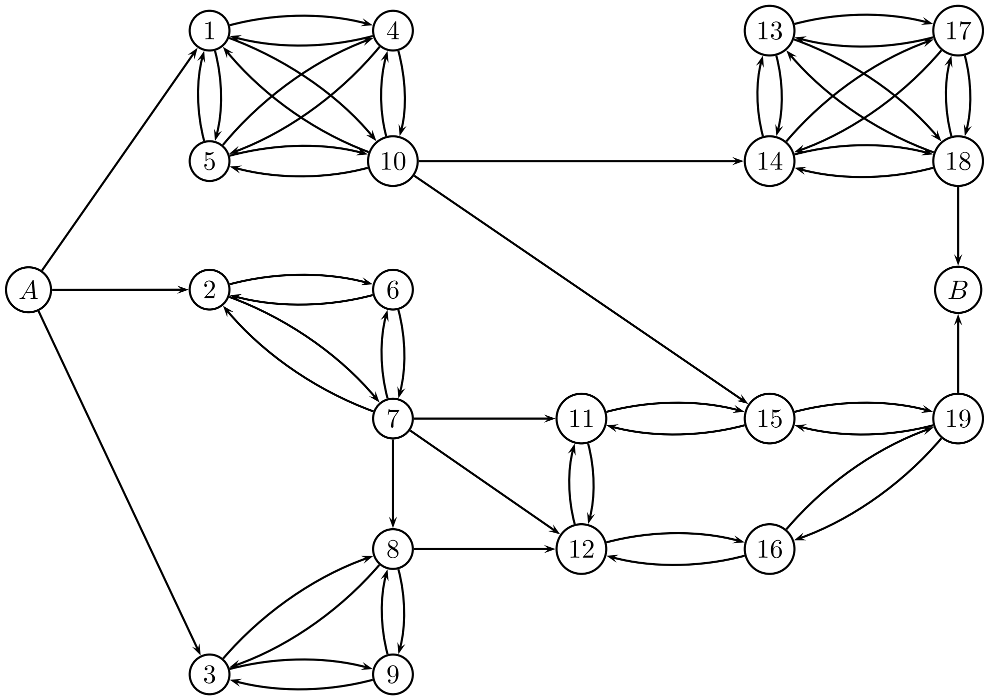
**Exercice 83.** Parmi les cinq graphes suivants (un seul est non orienté), lesquels ont une matrice d'adjacence qui est irréductible ? Lesquels en ont une qui est primitive ?



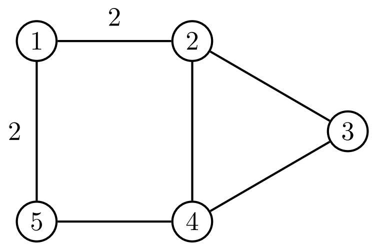

**Exercice 84.** On considère le graphe orienté suivant. On demande d'évaluer le plus rapidement possible, à une constante multiplicative (strictement positive) près, le comportement asymptotique du nombre de chemins de longueur $n$ joignant le sommet $A$ au sommet $B$ (lorsque $n$ tend vers

l'infini).




**Exercice 85.**

(a) Trouver le nombre de sous-arbres couvrants du multi-graphe non orienté suivant.
(b) Le nombre de sous-arbres couvrants changerait-il si on rajoutait des boucles sur certains nœuds ?




**Exercice 86.** Trouver le nombre de sous-arbres couvrants du graphe biparti complet $K_{3,3}$.

**Exercice 87.** On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Représenter le graphe orienté $D$ ayant $M$ comme matrice d'adjacence.
(b) Déterminer les composantes fortement connexes du graphe $D$.
(c) Renuméroter les sommets de $D$ de telle sorte que la matrice d'adjacence correspondante soit bloc-triangulaire composée (supérieure ou inférieure).
(d) Déterminer les valeurs propres de $D$. Exprimer, en fonction de celles-ci, le nombre de chemins fermés de longueur $n$ dans $D$.
(e) Prouver que la matrice $M$ n'est ni primitive, ni irréductible. Est-il possible de remplacer un unique élément de la matrice $M$ pour la rendre irréductible ? Si oui, énumérer toutes les possibilités. Même question pour la rendre primitive.

(f) (BONUS) Si $c_n$ dénote le nombre de chemins de longueur $n$ joignant les deux sommets de $D$ réalisant le diamètre de $D$, prouver que $c_n$ satisfait, pour tout $n \geq 0$ la relation

$$c_{n+4} = 2\,c_{n+3} + c_{n+2} - 2\,c_{n+1} - c_n.$$

*(Janvier 2015, question 3)*

**Exercice 88.** On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Représenter le graphe orienté $D$ ayant $M$ comme matrice d'adjacence.
(b) Déterminer les composantes fortement connexes du graphe $D$.
(c) Prouver que la matrice $M$ n'est ni primitive, ni irréductible. Est-il possible d'ajouter un unique arc au graphe $D$ pour rendre la matrice correspondante irréductible ? Si oui, énumérer toutes les possibilités. Même question pour la rendre primitive.
(d) En supposant les sommet de $D$ numérotés de façon compatible avec $M$, montrer que, pour tout $n$, les nombres de chemins de longueur $n$ joignant 3 à 2, 4 à 3, 2 à 4 sont égaux. (Bonus: montrer que cette quantité est aussi égale au nombre de chemins de longueur $n$ joignant 2 à 1.)

*(Janvier 2016, question 3)*

**Exercice 89.** On considère la matrice

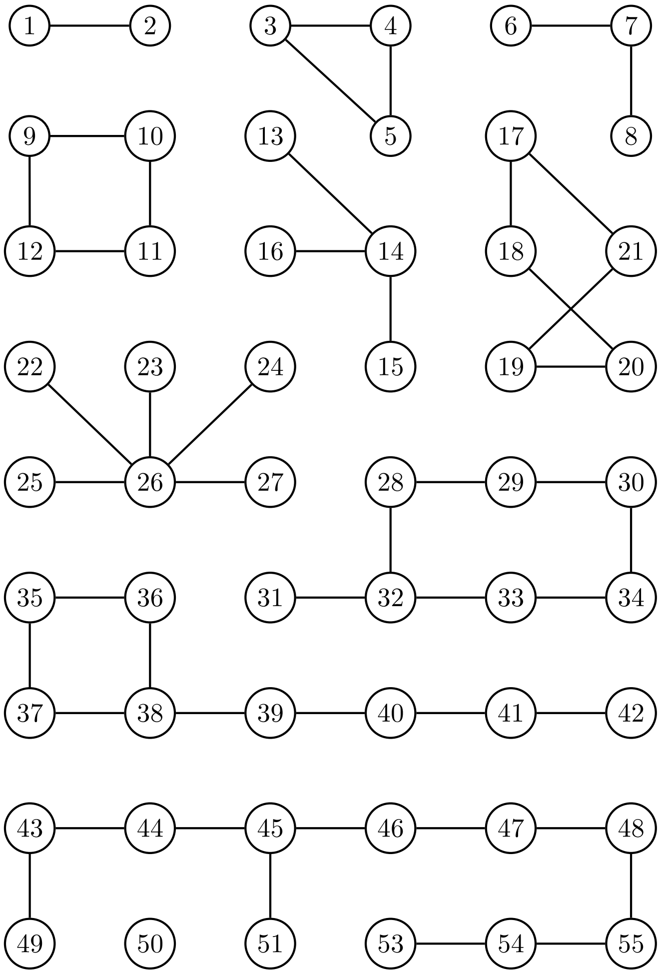
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Représenter le graphe orienté $D$ ayant $M$ comme matrice d'adjacence.
(b) Prouver que la matrice $M$ est primitive. Est-il possible de supprimer un unique arc au graphe $D$ pour rendre la matrice correspondante irréductible mais non primitive ?
(c) Soit $\alpha$ la valeur propre de Perron de $M$. Quels renseignements peut-on tirer de $M^n$ quand $n$ tend vers l'infini ? (Un énoncé théorique suffit pour répondre à la question.)
(d) En supposant les sommets de $D$ numérotés de façon compatible avec $M$, montrer que, pour tout $n \geq 4$, le nombre de chemins fermés partant et arrivant en 1 de longueur $n+4$ est égal à la somme des nombres de chemins fermés partant et arrivant en 1 de longueur $n$ et ceux de longueur $n+1$. En déduire le nombre de tels chemins fermés de longueur 16 passant par 1.

*(Janvier 2017, question 3)*

## Chapitre 3

**Exercice 90.** Regrouper par classe d'homéomorphie les onze graphes non orientés suivants, et préciser lesquels sont planaires.



**Exercice 91.** Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, le graphe complet $K_n$ est-il planaire ?

**Exercice 92.** *(cf. Exercice 78)* Le graphe $G_n = K_{3n} - C_{3n}$ est-il planaire? *(Mai 2009, question 1Bc)*

**Exercice 93.** *(cf. Exercice 79)* Le graphe $G_n = K_{4n} - C_{4n}$ est-il planaire? *(Août 2009, question 1c)*

**Exercice 94.** Prouver qu'il n'existe pas de graphe simple non orienté planaire qui possède exactement 6 nœuds dont 3 au moins sont de degré 5. *(Juin 2007, question 0c)*

**Exercice 95.** Trouver le nombre maximum $A$ d'arêtes qu'un graphe simple planaire de 6 nœuds peut avoir. Donner une représentation planaire d'un graphe de 6 nœuds et $A$ arêtes.

**Exercice 96.** Prouver que les graphes simples non orientés suivants n'existent pas ou en dessiner une représentation planaire.

(a) Un graphe planaire ayant exactement deux faces, toutes triangulaires.

(b) Un graphe planaire ayant exactement cinq faces, toutes triangulaires.
(c) Un graphe planaire ayant exactement six faces, toutes triangulaires. *(Juin 2008, question 4)*
(d) Un graphe planaire ayant exactement huit faces, toutes triangulaires.

**Exercice 97.**
(a) Est-il possible de numéroter les arêtes d'un octaèdre régulier de 1 à 12 de façon à ce que la somme des numéros des arêtes aboutissant en un sommet soit indépendante du sommet choisi ?
(b) Est-il possible de numéroter les arêtes d'un cube de 1 à 12 de façon à ce que la somme des numéros des arêtes aboutissant en un sommet soit indépendante du sommet choisi ?

**Exercice 98.** On considère une représentation planaire d'un graphe ayant exactement 300 faces, toutes triangulaires.
(a) Déterminer les nombres $A$ d'arêtes et $S$ de sommets de ce graphe.
(b) Comparer la somme des degrés des nœuds de ce graphe avec celle de son dual.
(c) Trouver la plus grande valeur de $n$ pour laquelle il existe un graphe vérifiant l'énoncé et dont le dual possède une face qui est un polygone ayant $n$ côtés.

**Exercice 99.** Un ballon de football peut être vu comme un polyèdre convexe dont chaque face est hexagonale ou pentagonale. Sachant que chaque sommet de ce polyèdre appartient à exactement deux faces hexagonales et une face pentagonale, déterminer les nombres $S$ de sommets, $A$ d'arêtes, $H$ de faces hexagonales et $P$ de faces pentagonales de ce polyèdre.

**Exercice 100.** On considère un polyèdre convexe qui a exactement six faces carrées et huit faces triangulaires. Chaque sommet de ce polyèdre est le sommet du même nombre $c$ de carrés et du même nombre $t$ de triangles. Trouver $c$, $t$, le nombre d'arêtes et le nombre de sommets de ce polyèdre.

**Exercice 101.** On considère un graphe et une de ses représentations planaires dont chaque sommet est un sommet d'exactement une face triangulaire, deux faces carrées et une face pentagonale. Déterminer le nombre de sommets $S$, le nombre d'arêtes $A$, le nombre de faces triangulaires $T$, le nombre de faces carrées $C$ et le nombre de faces pentagonales $P$ de ce graphe. *(Juin 2006, question 3)*

**Exercice 102.** On considère un graphe et une de ses représentations planaires dont chaque face est triangulaire et possède un nœud de degré 3 et deux nœuds de degré 6. Déterminer le nombre $N_3$ de nœuds de degré 3, le nombre $N_6$ de nœuds de degré 6, le nombre $A$ d'arêtes et le nombre $F$ de faces de ce graphe, en justifiant soigneusement chaque mise en équation. Dessiner une représentation planaire de ce graphe. *(Juin 2007, question 3)*

**Exercice 103.** On considère une représentation planaire d'un graphe. Sachant que chaque face de celle-ci est un quadrilatère ayant exactement un nœud de degré 3, deux nœuds de degré 4 et un nœud de degré 5, trouver son nombre d'arêtes. *(Juin 2008, question 5)*

**Exercice 104.** On considère un graphe planaire dont les représentations planaires n'ont que des faces pentagonales et dont celles de son dual n'ont que des faces triangulaires. Trouver le nombre de faces, le nombre d'arêtes et le nombre de sommets de ce graphe et en dessiner une représentation planaire. *(Août 2008, question 3)*

**Exercice 105.** On considère un graphe planaire dont les représentations planaires n'ont que des faces triangulaires et dont celles de son dual n'ont que des faces quadrilatérales. Trouver le nombre de faces, le nombre d'arêtes et le nombre de sommets de ce graphe et en dessiner une représentation planaire. *(Août 2009, question 3)*

**Exercice 106.** On considère une représentation planaire $\mathcal{A}$ d'un graphe $G$ qui est le squelette d'un polyèdre convexe et une représentation planaire $\mathcal{B}$ du dual de $G$. Toutes les faces de $\mathcal{A}$ sont des octogones ou des triangles. Toutes les faces de $\mathcal{B}$ sont des triangles dont exactement un nœud est de degré strictement inférieur à 6. Trouver le nombre de sommets du graphe $G$ et dessiner une représentation planaire de ce dernier.

**Exercice 107.** On considère une représentation planaire $\mathcal{R}$ d'un graphe $G$ qui est le squelette d'un polyèdre convexe et une représentation planaire $\mathcal{R}^*$ du dual de $G$. On suppose que $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}^*$ ont le même nombre de faces triangulaires et que toutes leurs autres faces sont quadrilatérales. Soient $T, Q$ et $A$ les nombres respectifs de faces triangulaires, de faces quadrilatérales et d'arêtes du graphe $\mathcal{R}$.

(a) Exprimer $A$ en fonction de $T$ et $Q$.
(b) Prouver que $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}^*$ ont le même nombre de faces quadrilatérales.
(c) Exprimer $T$ et $Q$ en fonction de $A$.
(d) Dessiner une représentation planaire dans le cas particulier $T = Q = 4$.

*(Mai 2009, question 3)*

**Exercice 108.** On considère un graphe planaire connexe $G$ ayant huit faces triangulaires et dix-huit faces carrées. De chaque sommet de $G$ partent une face triangulaire et trois faces carrées. Déterminer le nombre de sommets et le nombre d'arêtes de $G$.
*(Janvier 2016, question 4)*

**Exercice 109.** On considère un graphe planaire connexe $G$ ayant trente faces limitées par quatre arêtes. De chaque sommet de $G$ partent trois ou cinq faces. Déterminer le nombre total de sommets et le nombre d'arêtes de $G$. Déterminer également le nombre de sommets de degré 3 et 5 respectivement.
*(Août 2016, question 4)*

**Exercice 110.** On considère un graphe planaire connexe $G$ ayant 32 faces triangulaires et 6 faces carrées. De chaque sommet de G partent quatre faces triangulaires et une face carrée. Déterminer le nombre de sommets et le nombre d'arêtes de $G$. *(Janvier 2017, question 4)*

**Exercice 111.** On considère un graphe planaire connexe $G$ ayant 20 faces triangulaires et 12 faces pentagonales. De chaque sommet de $G$ partent deux faces triangulaires et deux faces pentagonales. Déterminer le nombre de sommets et le nombre d'arêtes de $G$. *(Août 2017, question 4)*

**Exercice 112. (Solides de Platon)** Un polyèdre est dit *régulier* si toutes ses faces sont des polygones réguliers ayant le même nombre de côtés (autrement dit, les faces sont toutes identiques) et si de chacun de ses sommets part le même nombre d'arêtes. Un *solide de Platon* est un polyèdre régulier convexe. Démontrer qu'il n'y a que cinq solides de Platon : le tétraèdre régulier (ou pyramide), l'hexaèdre régulier (ou cube), l'octaèdre régulier, le dodécaèdre régulier et l'icosaèdre régulier. Rechercher aussi aussi les duaux de ces solides.

**Exercice 113.** On considère un polyèdre convexe de trente-deux faces, toutes triangulaires ou pentagonales. Chaque sommet de ce polyèdre rencontre le même nombre $t$ de face(s) triangulaire(s) et le même nombre $p$ de face(s) pentagonale(s). Trouver les valeurs de $t$ et de $p$, ainsi que les nombres d'arêtes et de sommets de ce polyèdre.

**Exercice 114.** On considère un polyèdre convexe de trente-huit faces, toutes carrées ou triangulaires. Chaque sommet de ce polyèdre rencontre le même nombre $c$ de face(s) carrée(s) et le même nombre $t$ de face(s) triangulaire(s). Trouver les valeurs de $c$ et de $t$, ainsi que les nombres d'arêtes et de sommets de ce polyèdre.

## Chapitre 4

*Il ne s'agit que de graphes simples non orientés.*

**Exercice 115.**

(a) Peut-on colorier chaque arête du graphe $K_5$ en rouge ou en bleu de façon à ne pas avoir de sous-graphe triangulaire dont les trois arêtes sont de la même couleur ?

(b) Peut-on colorier chaque arête du graphe $K_6$ en rouge ou en bleu de façon à ne pas avoir de sous-graphe triangulaire dont les trois arêtes sont de la même couleur ?

(c) Peut-on colorier chaque arête du graphe $K_{17}$ en rouge, en bleu ou en jaune de façon à ne pas avoir de sous-graphe triangulaire dont les trois arêtes sont de la même couleur ?

(d) Trouver un nombre $n$ pour lequel vous pouvez prouver qu'on ne peut pas colorier chaque arête du graphe $K_n$ en rouge, en bleu, en jaune ou en vert de façon à ne pas avoir de sous-graphe triangulaire dont les trois arêtes sont de la même couleur.

**Exercice 116.** On considère un multi-graphe $G$ non orienté et sans boucle. On se demande s'il est possible de colorier ses arêtes avec deux couleurs, rouge et bleu, de façon à ce que chacun de ses nœuds rencontre autant d'arêtes rouges que d'arêtes bleues.

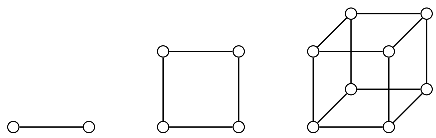
(a) Prouver que cela n'est possible pour aucun multi-graphe $G$ de 2009 arêtes.

(b) Prouver que cela est possible pour tout multi-graphe $G$ de 12 arêtes, qui est connexe et dont chacun des nœuds est de degré pair.

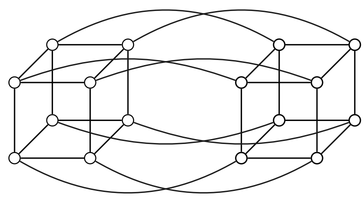
(c) Donner un exemple pour lequel c'est impossible malgré le fait que $G$ a 12 arêtes et que chacun de ses nœuds est de degré pair.

(d) Cela est-il possible pour tout multi-graphe $G$ de 12 arêtes et dont chacun des nœuds est de degré multiple de 4? *(Juin 2009, question 2)*

**Exercice 117.** Soit $n \geq 1$. Le *n-cube* $Q_n$ est un graphe défini comme suit. Ci-dessous, sont représentés tout d'abord les graphes $Q_1$, $Q_2$ et $Q_3$ :



Pour tout $n \geq 1$, on obtient $Q_{n+1}$ en considérant deux copies disjointes de $Q_n$ et en ajoutant une arête pour chaque paire de sommets qui se correspondent dans les deux copies de $Q_n$. Voici une représentation de $Q_4$ :



(a) En fonction de $n$, combien de sommets et d'arêtes possède $Q_n$ ? Quel est le degré de chaque sommet de $Q_n$ ?

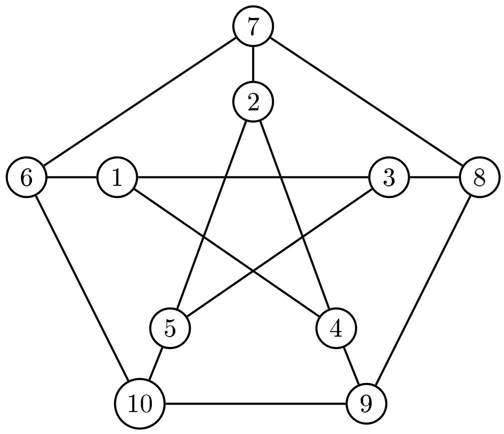
(b) Pour quelles valeurs de $n$, le $n$-cube est-il hamiltonien ?

(c) Pour quelles valeurs de $n$, le $n$-cube est-il eulérien ?

(d) Prouver que, pour tout $n \geq 1$, $Q_n$ est un graphe 2-colorable. En déduire que $Q_n$ est biparti.

*(Janvier 2015, question 2)*

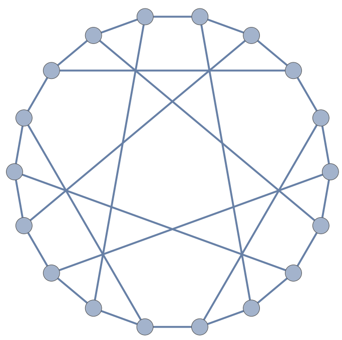
**Exercice 118.** On considère le graphe de Petersen $P = (V, E)$.




(a) Montrer que $P$ contient un *chemin* hamiltonien.
(b) On considère le graphe obtenu en supprimant un sommet quelconque de $P$. Ce nouveau graphe possède-t-il un circuit hamiltonien ?
(c) Le graphe $P$ est-il Eulérien ?
(d) Déterminer le nombre minimum de couleurs nécessaires pour avoir un coloriage propre des sommets de $P$.
(e) L'*excentricité* d'un sommet $u$ est défini comme $\varepsilon(v) = \max_{u \in V} d(v, u)$. Le *rayon* du graphe est défini comme $\min_{v \in V} \varepsilon(v)$. Que vaut le rayon de $P$ ?
(f) Donner la matrice d'adjacence de $P$. Vérifier (un argument simple suffit) que 3 en est une valeur propre.

*(Août 2015, question 2)*

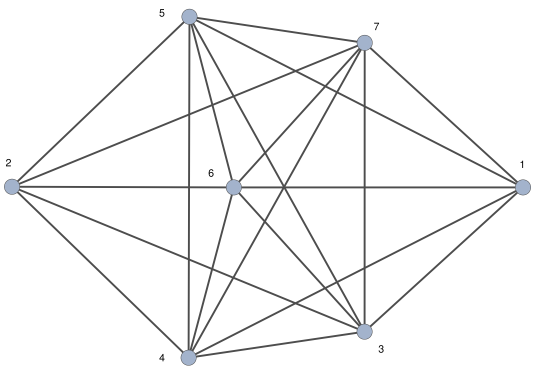
**Exercice 119.** Soit le *graphe de Pappus* $G$ représenté ci-dessous.



(a) Ce graphe est-il hamiltonien ?
(b) Ce graphe est-il eulérien ?
(c) Montrer que $G$ est un graphe 2-colorable. En déduire que $G$ est biparti.
(d) Montrer, sans calcul, que 3 est valeur propre et que 4 n'est pas valeur propre de $G$.

*(Janvier 2016, question 2)*

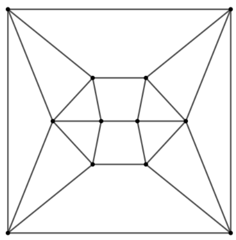
**Exercice 120.** Soit le *graphe de Turan* $G$ représenté ci-dessous.




(a) Ce graphe est-il hamiltonien ?
(b) Ce graphe est-il eulérien ?
(c) Ce graphe est-il planaire ?
(d) Fournir la matrice d'adjacence de ce graphe.
(e) Sachant que les valeurs propres sont $-1, 0, 2+\sqrt{14}, 2-\sqrt{14}$, peut-on en déduire que ce graphe est biparti ?
(f) Expliquer pourquoi il n'existe aucun coloriage propre des sommets du graphe avec moins de 6 couleurs. Donner un coloriage propre de $G$ avec 6 couleurs.
(g) La matrice d'adjacence est-elle primitive ?

*(Août 2016, question 5)*

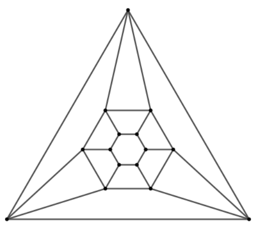
**Exercice 121.** Soit le graphe $G$ à 12 sommets représenté ci-dessous.



(a) Ce graphe est-il hamiltonien ? Quelle est sa fermeture ?
(b) Ce graphe est-il eulérien ?
(c) Montrer que $G$ est un graphe 4-colorable qui n'est pas 3-colorable.
(d) Ajouter au plus 3 arêtes au graphe pour qu'il ne soit plus planaire.
(e) Représenter le dual de cette représentation planaire de $G$. Quel est le nombre minimum de couleurs à utiliser pour colorer les faces de cette représentation planaire de $G$, des faces adjacentes recevant des couleurs distinctes ?

*(Janvier 2017, question 2)*

**Exercice 122.** Soit le graphe $G$ à 15 sommets représenté ci-dessous.



(a) Ce graphe est-il hamiltonien ? Quelle est sa fermeture ?
(b) Ce graphe est-il eulérien ? S'il ne l'est pas, ajouter au plus 3 arêtes pour le rendre eulérien.

(c) Montrer que $G$ est un graphe 3-colorable (pour les sommets) qui n'est pas 2-colorable.
(d) Ce graphe est-il biparti ?
(e) Représenter le dual de cette représentation planaire de $G$. Quel est le nombre minimum de couleurs à utiliser pour colorer les faces de cette représentation planaire de $G$, des faces adjacentes recevant des couleurs distinctes ?

*(Août 2017, question 2)*