TD 13 mars 2019
Algèbre linéaire

1$\star$ Parmi les applications suivantes, lesquelles sont linéaires ?

- $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$ ;
- $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, x \mapsto (x, 2x, 3x)$ ;
- $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 2y \\ -x + y \\ x - y \end{pmatrix} \;;$$
- $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y + 1 \\ y - z \end{pmatrix} \;;$$
- $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z \to \overline{z}$

2$\star$ On sait que
$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$
forment une base de $\mathbb{R}^3$. On considère l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par
$$Tu_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\; Tu_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\; Tu_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$
Calculer
$$T \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}.$$
Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, calculer
$$T \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$
Trouver l'image et le noyau de $T$. L'application est-elle injective ?
Représenter matriciellement $T$ dans la base $(u_1, u_2, u_3)$.

3$\star$ Comme dans l'exercice précédent, on sait que
$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$
forment une base de $\mathbb{R}^3$. On considère l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par
$$Su_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\; Su_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},\; Su_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer
$$T\begin{pmatrix}3\\8\\-3\end{pmatrix}.$$
Trouver l'image et le noyau de $T$. En donner une base. Vérifier le théorème de la dimension. L'application est-elle injective ?

3$\star$ Soit $S$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathbb{R}^2_2$. Soit l'application linéaire $T : S \to \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ définie par
$$T\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} = 2x^2+3x-1, \quad T\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} = x^2+1, \quad T\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} = x.$$
Calculer
$$T\begin{pmatrix}2&3\\3&2\end{pmatrix}.$$
Est-ce que $T$ est un isomorphisme de $S$ dans $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ ? Si oui, que vaut $T^{-1}(3x^2+11x-3)$ ?

4$\star$ Soit l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par
$$T : \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}a+2b\\a-b+c\\2a+b+c\end{pmatrix}$$

- Représenter $T$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
- Représenter $T$ dans la base
$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$
Répondez à cette deuxième partie de deux façons différentes. Soit en utilisant une matrice de changement de bases, soit en cherchant directement les images par $T$ des vecteurs de la seconde base (à décomposer dans celle-ci).
- Quel est le rang de $T$ ?
- Quel est le noyau de $T$.

5$\star$ On considère l'espace des polynômes de degré au plus 3 et l'application linéaire "dérivée" $D_x : \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$. Représenter matriciellement $D_x$ dans la base $(x^3, x^2, x, 1)$. Soit $A$ la matrice obtenue, que remarquez-vous en calculant $A^4$ ?