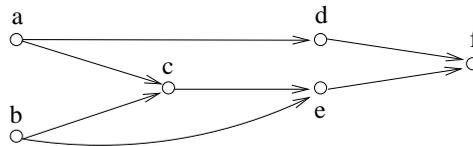


**Consignes :** La clarté, la rédaction et la justification des réponses fournies interviennent dans la notation. Énoncer les résultats utilisés. Bon travail.

Remarque : Cet examen à blanc est plus long qu'un véritable examen. Pour se tester, mieux vaut avoir des questions plus longues ou un plus nombreuses qu'en situation réelle.

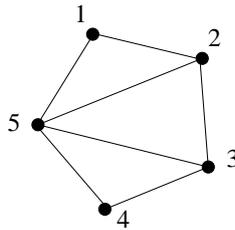
1. Définir la notion de *graphe hamiltonien*. Donner deux exemples de graphes non orientés, l'un étant hamiltonien, l'autre non (justifier vos constructions). Énoncer le théorème de Dirac.

2. Définir la notion de *tri topologique*. Fournir tous les tris topologiques du graphe suivant (il y en a 7) :



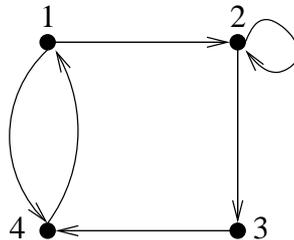
3. Soit  $k \geq 1$  un entier. Définir la notion de multi-graphe orienté *k-régulier*. Expliquer pourquoi  $k$  est valeur propre d'un tel graphe. Un graphe  $k$ -régulier est-il toujours connexe ?

4. Soit le graphe  $G = (V, E)$  ci-dessous



- Donner un sous-arbre couvrant  $G$ .
- Combien de sous-arbres couvrants  $G$  possède-t-il (on suppose que les sommets ont reçus des labels distincts, ainsi on ne compte PAS les sous-arbres à isomorphisme près) ? Détaillez le résultat théorique utilisé.
- Le graphe  $G$  est-il eulérien ? Possède-t-il un chemin eulérien, si oui, combien ? Justifier.

5. Soit le multi-graphe orienté  $G = (V, E)$  représenté ci-dessous.



- Ce graphe est-il fortement connexe ?
- Quelle est la période du sous-graphe induit par les sommets  $\{1, 4\}$  ?
- Quelle est la période du graphe  $G$  privé de la boucle en 2 ?
- Donner la matrice d'adjacence de  $G$ .
- Cette matrice est-elle primitive ? Justifier votre réponse.
- Donner une relation de récurrence linéaire satisfaite par  $(x_n)_{n \geq \mathbb{N}}$  où  $x_n$  compte le nombre de chemins de longueur  $n$  de 1 vers 3. Spécifier les conditions initiales.

6. Soit la relation de récurrence

$$x_{n+2} = 2x_{n+1} + 2x_n$$

Sachant que  $x_0 = 1$  et  $x_1 = 3$ ,

- donner une formule close pour le  $n$ ième terme  $x_n$ .
- Exprimer la série génératrice de  $(x_n)_{n \geq 0}$  sous la forme d'une fraction rationnelle.
- Soit la série génératrice

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n z^n = \frac{1}{(1-2z)^2}.$$

Donner une formule close pour  $y_n$  (il s'agit d'une exponentielle-polynôme).

7. On considère un graphe planaire  $G$  ayant 20 faces triangulaires et 12 faces pentagonales. De chaque sommet de  $G$  partent exactement 2 faces triangulaires et 2 faces pentagonales. Déterminer le nombre de sommets et d'arêtes de  $G$ .