Université de Liège

Année académique 2022 – 2023

Théorie des graphes

Exercices[1]

Sciences Mathématiques (blocs 2 et 3)
Sciences Informatiques (bloc 2)

Titulaire : Michel Rigo
m.rigo@uliege.be

Assistant : Antoine Renard
antoine.renard@uliege.be

1 Manipulations de base

Exercice 1.1. Il existe quatre groupes sanguins :

— AB pour les personnes ayant des antigènes A et B,
— A pour les personnes ayant des antigènes A mais pas d'antigènes B,
— B pour les personnes ayant des antigènes B mais pas d'antigènes A,
— O pour les personnes n'ayant ni d'antigènes A ni d'antigènes B.

Il existe également deux rhésus sanguins :

— positif ($+$),
— négatif ($-$).

On admet que les seuls interdits biologiques pour recevoir du sang sont les suivants :

— recevoir du sang possédant un antigène dont on est dépourvu,
— recevoir du sang ayant un rhésus positif si on est rhésus négatif.

A partir des informations données ci-dessus,

(a) tracer le graphe orienté dont $\{AB+, AB-, A+, A-, B+, B-, O+, O-\}$ est l'ensemble des sommets et dont les arcs désignent les possibilités de donner du sang sans violer les interdits biologiques,

(b) donner le demi-degré sortant $d^+(v)$ et le demi-degré entrant $d^-(v)$ de chaque nœud v, et en déduire le groupe sanguin qui est donneur (resp. receveur) universel,

(c) donner l'ensemble des successeurs $\mathrm{succ}(v)$ et l'ensemble des prédécesseurs $\mathrm{pred}(v)$ de chaque nœud v.

Exercice 1.2. Un fermier se promène avec trois êtres vivants : un loup, une chèvre et une salade. Il doit traverser une rivière mais il ne peut le faire qu'avec au plus un seul des trois à la fois. De plus, le fermier ne peut quitter une rive en y laissant la chèvre, sauf si celle-ci y reste seule (sinon, en l'absence du fermier, la chèvre mangerait la salade ou serait mangée par le loup). À l'aide d'un graphe non orienté et simple, expliquer comment le fermier peut s'y prendre pour se retrouver sur l'autre rive en le moins de traversées possible.

Exercice 1.3. Lors d'une réception dans laquelle il y a au moins deux personnes, toutes les personnes qui se connaissent se sont serrées la main. Montrer qu'il existe deux personnes qui ont serré la main au même nombre de personnes.

Exercice 1.4. À une réception, n couples sont invités ($n \geq 1$). Certains invités se serrent la main, mais personne ne sert la main à son conjoint. L'un des invités, nommé I, demande à chaque autre personne combien de poignées de main elle a données. Il obtient $2n-1$ réponses différentes. Combien la femme de monsieur I a-t-elle donné de poignées de main ? Combien monsieur I a-t-il donné de poignées de main ?

1. Par convention, tous les graphes de ces notes sont supposés finis.

Exercice 1.5.

(a) Construire le graphe biparti complet $K_{2,3}$ et compter son nombre d'arêtes.
(b) Combien le graphe biparti complet $K_{m,n}$ possède-t-il d'arêtes ? $(m, n \geq 1)$
(c) Construire le graphe triparti complet $K_{2,3,2}$ et compter son nombre d'arêtes.
(d) Combien le graphe triparti complet $K_{l,m,n,}$ possède-t-il d'arêtes ? $(l, m, n \geq 1)$

Exercice 1.6. Prouver que les graphes non orientés suivants n'existent pas.

(a) Un graphe simple qui est 3-régulier (c'est-à-dire dont chaque nœud est de degré 3) et qui possède exactement 7 nœuds. *(Juin 2007, question 0a)*
(b) Un graphe ayant un nombre impair de nœuds, tous de degré impair. *(Juin 2006, question 1a)*
(c) Un graphe simple ayant 8 nœuds et 29 arêtes. *(Juin 2006, question 1b)*

Exercice 1.7. Pour chacun des graphes simples non orientés suivants, donner un exemple d'existence ou prouver l'inexistence.

(a) Un graphe biparti 3-régulier de 8 nœuds.
(b) Un graphe biparti 4-régulier de 11 nœuds.

Exercice 1.8.

(a) Existe-t-il un groupe de 11 personnes tel que chaque membre du groupe connaisse exactement 3 autres personnes de ce groupe ?
(b) Même question mais avec un groupe de 8 personnes (et chaque membre du groupe connaît exactement 3 autres membres du groupe).

Pour les deux points précédents, en cas de réponse affirmative, représenter un graphe illustrant la situation. Le graphe obtenu est-il toujours connexe ? *(Août 2015, question 1)*

Exercice 1.9. Soit G un graphe simple non orienté possédant m arêtes $e_1, \ldots, e_m$. On définit le *graphe ligne* $L(G)$ comme le graphe ayant m sommets $v_1, \ldots, v_m$ et l'arête $\{v_i, v_j\}$ appartient à $L(G)$ si et seulement si les arêtes e_i et e_j de G sont adjacentes (i.e., ont une extrémité commune).

(a) Représenter le graphe ligne du graphe complet K_4, du graphe biparti complet $K_{2,3}$ et d'un cycle à 6 sommets.
(b) Donner une expression pour le nombre d'arêtes de $L(G)$ en fonction des degrés des sommets de G.
(c) Montrer que si G est un graphe simple k-régulier (i.e., chaque sommet est de degré k), alors $L(G)$ est $(2k-2)$-régulier.

(Août 2015, question 3)

Exercice 1.10. Un *tournoi* est un graphe simple et orienté $G = (V, E)$ tel que pour toute paire $\{u, v\}$ de sommets distincts, exactement l'un des deux arcs (u, v) ou (v, u) appartient à E. Un tournoi est *transitif* si, pour tous sommets u, v, w, si $(u, v) \in E$ et $(v, w) \in E$, alors $(u, w) \in E$. Un *roi* d'un tournoi est sommet r à partir duquel on peut atteindre tout autre sommet de V par un chemin de longueur au plus 2.

(a) Donner un exemple de tournoi transitif et un exemple de tournoi non transitif, tous deux avec 4 sommets. Dans chaque cas, exhiber un roi du tournoi.
(b Soit v un sommet d'un tournoi $G = (V, E)$. Comparer $d^+(v) + d^-(v)$ et $\#V$.
(c) Démontrer qu'un tournoi est transitif si et seulement s'il est sans cycle.
(d) Démontrer qu'un tournoi possède au moins un roi (indice : considérer un sommet r de demi-degré sortant maximum et les ensembles $\mathrm{succ}(r)$ et $\mathrm{pred}(r)$).

(Janvier 2016, question 1)

Exercice 1.11. Soit G un graphe simple ayant n sommets et $n-1$ arêtes qui n'est pas un arbre. On suppose qu'un sommet isolé est un arbre "trivial".

(a) Prouver que G n'est pas connexe
(b) Prouve que G possède une composante qui est un arbre.
(c) Prouver que G possède une composante qui n'est pas un arbre.
(d) Prouver que si G possède exactement deux composantes connexes, alors celle qui n'est pas un arbre possède exactement un cycle.

(Janvier 2017, question 1)

Exercice 1.12. Un *matching parfait* d'un graphe simple (non-orienté) $G = (V, E)$ est un sous-ensemble $M \subseteq E$ tel que tout sommet de V est l'extrémité d'exactement une arête de M.

(a) Montrer que K_n possède un matching parfait si et seulement si n est pair.

(b) Combien de matchings parfaits distincts peut-on trouver dans le graphe biparti complet $K_{3,3}$?

(c) Prouver qu'un arbre A a un matching parfait si et seulement si, pour chaque sommet v de A, le graphe $A - v$ possède une seule composante connexe ayant un nombre impair de sommets.

(d) On considère un jeu entre deux joueurs A et B. On donne un graphe simple connexe G. Le joueur A débute la partie en choisissant un sommet. Les deux joueurs jouent alternativement en choisissant un sommet non choisi précédemment avec la contrainte de choisir un sommet voisin du dernier sommet sélectionné par l'autre joueur (autrement dit, A et B construisent ensemble un chemin). Le premier joueur incapable de jouer (il n'y a plus de sommet valide disponible) perd la partie. Montrer que si G a un matching parfait, alors B dispose d'une stratégie gagnante (quels que soient les sommets choisis par A, B pourra toujours gagner).

(Août 2017, question 1)

Exercice 1.13. Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté et non connexe. Montrer que son complémentaire, le graphe $\overline{G} = (V, (V \times V)\backslash E)$ est connexe. Que peut-on dire de $\text{diam}(\overline{G})$?

Exercice 1.14. Soit k un nombre entier strictement positif. Soit G un graphe simple, non orienté, connexe, fini et d'au moins deux nœuds. On suppose que dans chaque triplet de nœuds de G, on peut toujours choisir deux nœuds dont la distance est inférieure ou égale à k. Prouver qu'il est possible de colorier les nœuds de G avec deux couleurs, rouge et bleu, de manière à ce que les deux conditions suivantes soient satisfaites simultanément :

— la distance entre deux nœuds rouges est toujours inférieure ou égale à $2k$,

— la distance entre deux nœuds bleus est toujours inférieure ou égale à $2k$.

Exercice 1.15. On considère un graphe simple non orienté de 7 nœuds, tous de degré supérieur ou égal à 3.

(a) Prouver que ce graphe est connexe.

(b) Prouver que ce graphe n'a pas ses sept nœuds de degré exactement 3.

Exercice 1.16. Par définition, le rayon $\text{rad}(G)$ d'un graphe $G = (V, E)$ non orienté connexe non vide est

$$\mathrm{rad(G)} = \min_{\mathrm{a}\in \mathrm{V}} \max_{\mathrm{b}\in \mathrm{V}} \mathrm{d(a,b)}.$$

(a) Montrer que tout graphe non orienté connexe non vide G vérifie les inégalités suivantes :

$$\mathrm{rad(G)} \leq \mathrm{diam(G)} \leq 2\mathrm{rad(G)}.$$

(b) Pour quelles valeurs de $n \geq 1$ existe-t-il un graphe non orienté connexe qui possède n nœuds et dont le diamètre vaut exactement le rayon ?

(c) Pour quelles valeurs de $n \geq 1$ existe-t-il un graphe non orienté connexe qui possède n nœuds et dont le diamètre vaut le double du rayon ?

Exercice 1.17. Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté connexe non vide. Soit $k = \max_{x\in V} \deg(x)$. Prouver l'implication

$$k \geq 3 \Rightarrow \#V < \frac{k(k-1)^{\mathrm{rad(G)}}}{k-2}.$$

Exercice 1.18. Soit $G = (V, E)$ un graphe simple non orienté non vide. Soit $k = \min_{x\in V} \deg(x)$.

(a) Prouver que G possède un chemin simple de longueur k.

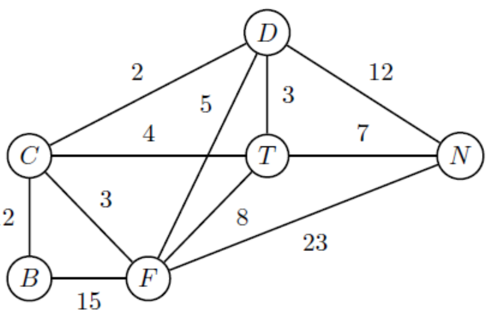
(b) Prouver que G possède un circuit simple de longueur au moins $k + 1$ si k vaut au moins 2.

Exercice 1.19. Soit G un graphe non orienté connexe qui possède au moins un circuit simple de longueur non nulle. On désigne par $f(G)$ la longueur du plus petit circuit simple de longueur non nulle de G.

(a) Prouver que $f(G) \leq 2\ \text{diam}(G) + 1$.

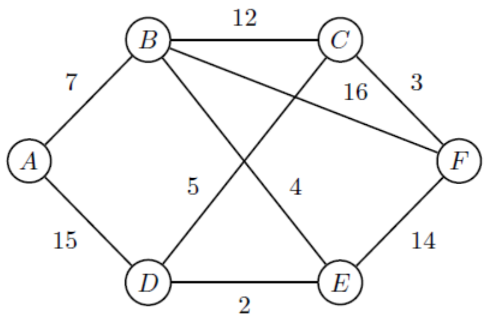
(b) Trouver un exemple réalisant l'égalité $f(G) = 2\ \text{diam}(G) + 1$.

Exercice 1.20. Un groupe d'amis organise une randonnée dans les Alpes. On a représenté par le graphe ci-dessous les sommets B, C, D, F, T, N par lesquels ils peuvent choisir de passer. Une arête entre deux sommets coïncide avec l'existence d'un chemin entre les deux sommets. Les distances en kilomètres entre chaque sommet sont indiquées sur le graphe. S'ils se trouvent au sommet B et souhaitent se rendre au sommet N, pouvez-vous leur indiquer un chemin dans le graphe qui minimise la distance du trajet ?

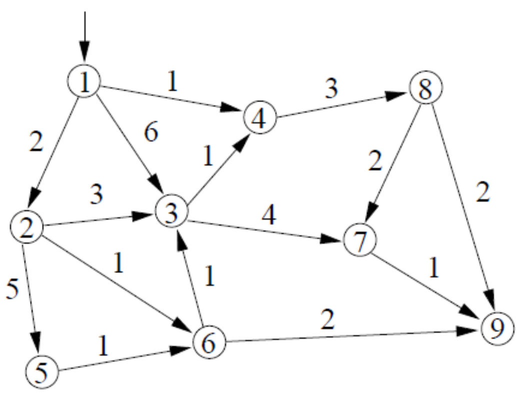


Exercice 1.21. Une agence de voyages organise différentes excursions dans une région du monde et propose la visite de sites incontournables, nommés A, B, C, D, E et F. Ces excursions sont résumées sur le graphe ci-dessous dont les sommets désignent les sites, les arêtes représentent les routes pouvant être empruntées pour relier deux sites et le poids des arêtes désigne le temps de transport en heures entre chaque site. Un touriste désire aller du site A au site F en limitant au maximum les temps de transport.

(a) En utilisant un algorithme, déterminer la plus courte chaîne reliant le sommet A au sommet F.
(b) En déduire le temps de transport minimal pour aller du site A au site F.

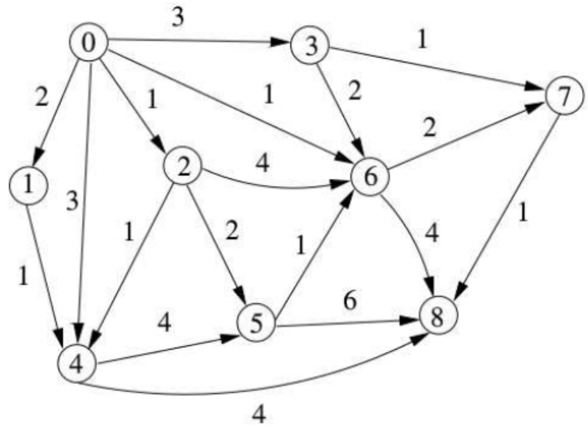


Exercice 1.22. Appliquer l'algorithme de Dijkstra permettant d'obtenir un chemin de poids minimal du sommet 1 vers les autres sommets du graphe. On considérera les itérations successives de l'algorithme en fournissant les valeurs des variables $T(v)$ et $C(v)$ pour chaque sommet $v \neq 1$ (poids actuel et chemin réalisé pour le sommet v).



(Août 2016, question 1)

Exercice 1.23. Appliquer l'algorithme de Dijkstra (en rappelant la signification des variables utilisées) au graphe ci-dessous pour obtenir des chemins de poids minimal du sommet 0 vers les autres sommets.



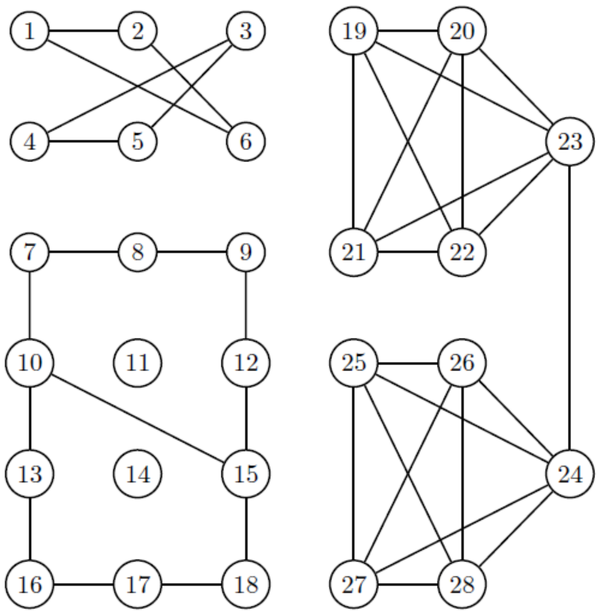
(Août 2017, question 3)

Exercice 1.24. On considère les quinze dominos $\{i, j\}$ où i et j sont des entiers vérifiant $0 < i < j < 7$. Est-il possible de juxtaposer ces dominos sur une ligne en respectant la règle principale de tout bon jeu de dominos qui se respecte ? Si oui, dessiner un exemple. Si non, expliquer pourquoi.

Exercice 1.25.

(a) Parmi les trois graphes non orientés suivants, lesquels sont eulériens ?

(b) Parmi ceux qui ne le sont pas, lesquels possèdent néanmoins un chemin eulérien ? Déterminer le nombre de chemins eulériens de chacun d'entre eux.

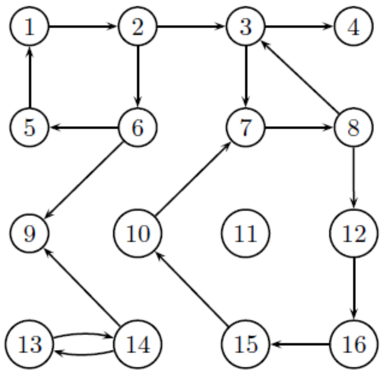


Exercice 1.26. Prouver qu'il n'existe pas de 1-graphe $G = (V, E)$ non orienté, non connexe, de 2006 nœuds, qui est eulérien et dont le complémentaire $\overline{G} = (V, (V \times V)\backslash E)$ est également eulérien.
(Juin 2006, question 1c)

Exercice 1.27. On considère un 1-graphe $G = (V, E)$ non orienté non connexe possédant n nœuds, n étant un entier au moins égal à 3. On suppose que chaque composante connexe de G est un graphe eulérien. Pour quelles valeurs de n le graphe $\overline{G} = (V, (V \times V)\backslash E)$ est-il eulérien ?

Exercice 1.28. Trouver toutes les valeurs entières de a, b, c telles que $0 < a \leq b \leq c$ et que le graphe triparti complet $K_{a,b,c}$ possède un chemin eulérien mais pas de circuit eulérien.

Exercice 1.29. Trouver les composantes simplement connexes et fortement connexes du graphe orienté suivant, et dessiner le graphe acyclique des composantes correspondant.



Exercice 1.30. Prouver qu'il n'existe pas de graphe G non orienté connexe possédant une et une seule arête de coupure e et tel qu'une composante connexe du sous-graphe $G - \{e\}$ possède au moins une arête de coupure.
(Juin 2006, question 1d)

Exercice 1.31. On considère un graphe non orienté connexe $G = (V, E)$, deux nœuds a et b, et une partie S de $V\backslash\{a, b\}$ séparant a et b. Montrer qu'aucun sous-ensemble propre de S ne sépare a et b si et seulement si tout point de S possède un voisin dans la composante connexe de $G - S$ à laquelle a appartient et un voisin dans la composante connexe de $G - S$ à laquelle b appartient.

Exercice 1.32. On considère un graphe non orienté connexe $G = (V, E)$, deux nœuds a et b, et une partie S de $V\backslash\{a, b\}$ séparant a et b. On note C_a la composante connexe de a dans $G - S$ et C_b la composante connexe de b dans $G - S$. On considère une autre partie S' de $V\backslash\{a, b\}$ séparant a et b. On note C'_a et C'_b les composantes connexes respectivement de a et de b dans $G - S'$. Montrer que les ensembles X et Y définis par

$$\begin{aligned} X &= (S \cap C'_a) \cup (S \cap S') \cup (S' \cap C_a) \\ Y &= (S \cap C'_b) \cup (S \cap S') \cup (S' \cap C_b) \end{aligned}$$

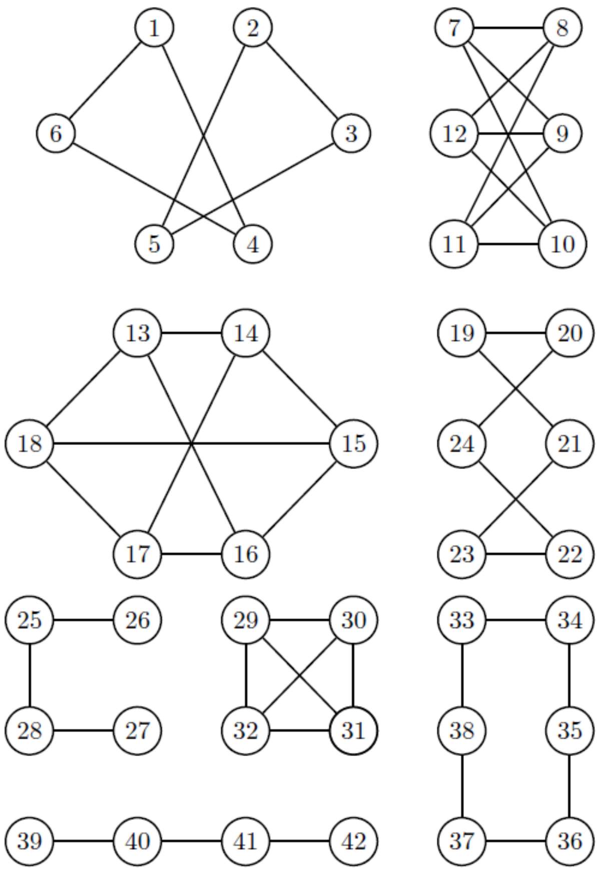
séparent a et b.

Exercice 1.33. Construire un graphe simple, non orienté et 3-régulier possédant une arête de coupure. Déterminer le nombre minimum de sommets qu'un tel graphe possède (justifier votre réponse).
(Janvier 2015, question 1)

Définition 1.1. Deux graphes non orientés $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$ sont *isomorphes* s'il existe (au moins) une bijection $f : V_1 \to V_2$ telle que $\{x, y\} \in E_1 \Leftrightarrow \{f(x), f(y)\} \in E_2$.

Exercice 1.34. Montrer que sur tout ensemble de graphes, la relation binaire G_1 *est isomorphe à* G_2 est une relation d'équivalence.

Exercice 1.35. Regrouper par classe d'isomorphie les huit graphes non orientés suivants.



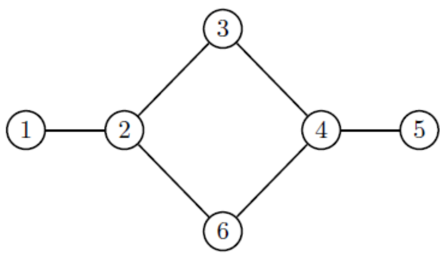
Exercice 1.36. Trouver tous les graphes simples non orientés eulériens de 5 nœuds, à isomorphisme près.

Exercice 1.37. Déterminer, à isomorphisme près, tous les graphes non orientés

(a) ayant 4 nœuds, tous de degré 1,
(b) ayant 5 nœuds, tous de degré 2,
(c) complets et dont le nombre d'arêtes est un multiple du nombre de nœuds,
(d) bipartis complets ayant exactement 12 arêtes.

Exercice 1.38.

(a) Combien le graphe non orienté ci-dessous possède-t-il de sous-graphes connexes non orientés ?
(b) Combien le graphe non orienté ci-dessous possède-t-il de sous-graphes connexes non orientés, à isomorphisme près ?



Exercice 1.39. Trouver tous les arbres, à isomorphisme près, ayant exactement

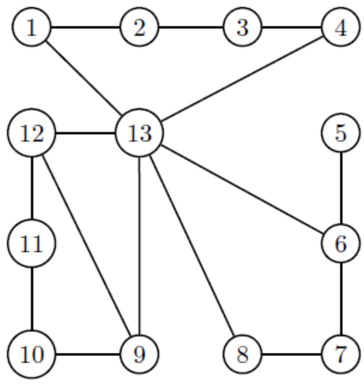
(a) 6 nœuds,
(b) 7 nœuds,
(c) 8 nœuds.

Exercice 1.40. Soit n un entier supérieur ou égal à 4. Trouver combien d'arbres de n nœuds sont de diamètre égal à 2 (resp. 3), à isomorphisme près.

Exercice 1.41. Soient k et n des entiers strictement positifs. Trouver le nombre d'arêtes et la somme des degrés des nœuds d'une forêt de k arbres et n nœuds.

Exercice 1.42. Trouver tous les arbres dont le complémentaire n'est pas connexe.

Exercice 1.43. Trouver le nombre de sous-arbres couvrants du graphe non orienté ci-dessous.



Exercice 1.44. Soit $G = (V, E)$ un arbre de diamètre $k \geq 1$.
(a) Prouver qu'il existe deux nœuds u et v tels que $\deg(u) = \deg(v) = 1$ et que $d(u, v) = k$.
(b) Prouver que $\mathrm{rad}(G) = \lceil \frac{k}{2} \rceil$.
(Interro 22/03/2007)

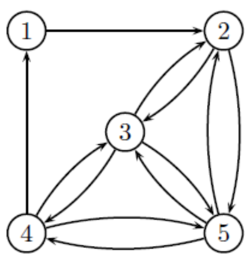
Exercice 1.45. On considère un arbre fini non orienté G et deux de ses sous-arbres A et B ayant au moins un sommet commun. Le sous-graphe $(A \cap B)$ de G, constitué des nœuds communs et des arêtes communes de A et de B, est-il nécessairement un arbre ?
(Août 2009, question 2)

Exercice 1.46. Soient d un nombre entier strictement positif et $\mathscr{G}$ l'ensemble des graphes (finis) non orientés connexes de diamètre d (on travaille à isomorphisme près). Déterminer la valeur suivante

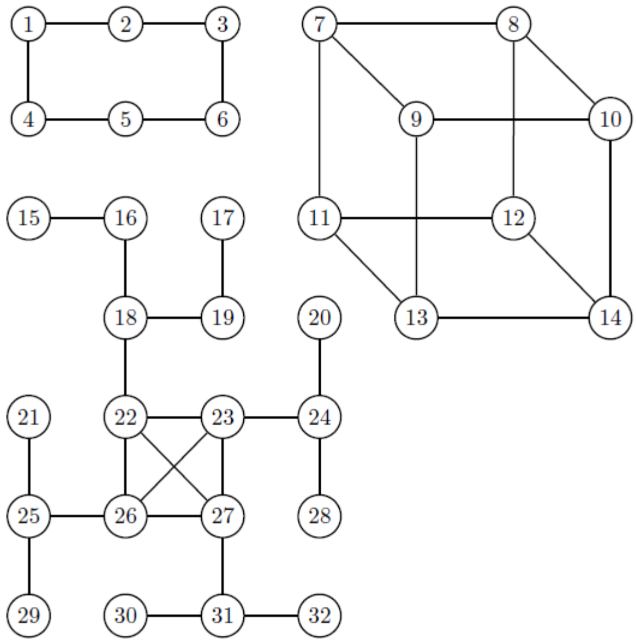
$$\max_{G \in \mathscr{G}} \min\{\mathrm{diam(T)} : \mathrm{T\ est\ un\ arbre\ de\ recouvrement\ de\ G}\}.$$

Exercice 1.47. Construire deux arbres non isomorphes ayant chacun 12 sommets dont 3 exactement sont de degré 3 et un unique sommet de degré 2.
(Août 2016, question 3)

Exercice 1.48. Sachant que $h : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$ est un automorphisme sur le graphe orienté dessiné ci-dessous, décrire explicitement h. Il est nécessaire de décrire toutes les solutions possibles.



Exercice 1.49. Trouver le nombre d'automorphismes de chacun des trois graphes suivants.



Exercice 1.50. Soient m et n deux entiers strictement supérieurs à 2. On nomme G et H deux graphes non orientés en forme de polygone de respectivement m et n côtés. Pour quelles valeurs de m et de n existe-t-il un homomorphisme du graphe G sur le graphe H ?

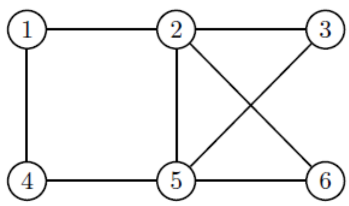
Exercice 1.51. Dessiner trois graphes simples non orientés deux à deux non isomorphes qui possèdent chacun exactement 20 automorphismes.
(Juin 2008, question 1)

Exercice 1.52. Décrire un graphe fini simple orienté ayant exactement 2009 automorphismes.

(a) Avec le nombre d'arcs que vous voulez.
(b) Avec au plus 90 arcs.
(c) Avec au plus 62 arcs.

Exercice 1.53. Pour quelles valeurs du nombre entier naturel n existe-t-il un graphe simple orienté ayant exactement n automorphismes ? Même question dans le cas de graphes non orientés.

Exercice 1.54. Trouver la fermeture du graphe non orienté suivant.



Exercice 1.55. Quel est le nombre maximum d'arêtes que peut posséder un graphe simple non orienté non complet mais égal à sa fermeture ? La réponse sera donnée en fonction du nombre de nœuds du graphe.

Exercice 1.56. Pour chacun des graphes simples non orientés suivants, donner un exemple d'existence ou prouver l'inexistence.

(a) Un graphe eulérien et non hamiltonien.
(b) Un graphe hamiltonien d'au moins 3 nœuds et avec une arête de coupure.

Exercice 1.57. Démontrer que le graphe biparti complet $K_{m,n}$ est hamiltonien si et seulement si $m = n$.
(Août 2016, question 2)

Exercice 1.58. Trente et un étudiants désirent se réunir une fois par jour autour d'une table ronde. Aucun d'entre eux n'accepte d'avoir le même voisin plus d'une fois. Combien de jours au maximum peuvent-ils se réunir ?
(Juin 2008, question 2)

Exercice 1.59. On considère le graphe qui est simple, orienté, qui a exactement 12 nœuds notés $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{11}$ et qui est tel qu'il existe un arc partant du nœud v_i et arrivant au nœud v_j si et seulement si $j \equiv i + 3 \pmod{12}$ ou $j \equiv i + 4 \pmod{12}$.

(a) Prouver que ce graphe est fortement connexe.
(b) Ce graphe est-il eulérien ?
(c) Quel est le nœud à partir duquel il est nécessaire d'emprunter le plus d'arcs pour atteindre le nœud v_0 ?
(d) Prouver que ce graphe n'est pas hamiltonien.

(Juin 2007, question 1)

Exercice 1.60. On considère un graphe simple, orienté, de 30 nœuds notés $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{29}$ et tel qu'il existe un arc partant du nœud v_i et arrivant au nœud v_j si et seulement si il existe $k \in \{6, 15\}$ tel que $j \equiv i + k \pmod{30}$. On note G ce graphe et H sa composante fortement connexe à laquelle le nœud v_0 appartient.

(a) Montrer que le graphe G possède trois composantes fortement connexes.
(b) Le graphe H est-il eulérien ?
(c) Le graphe H est-il hamiltonien ?
(d) Calculer la valeur du diamètre du graphe H.
(e) Combien le graphe H possède-t-il d'automorphismes ?

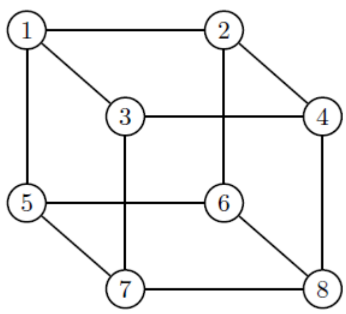
(Août 2008, question 1)

Exercice 1.61. Soit n un entier supérieur ou égal à 3. Quel est, en fonction de n, le nombre maximum d'arêtes que peut avoir un graphe simple non orienté non hamiltonien de n nœuds ? Justifier.

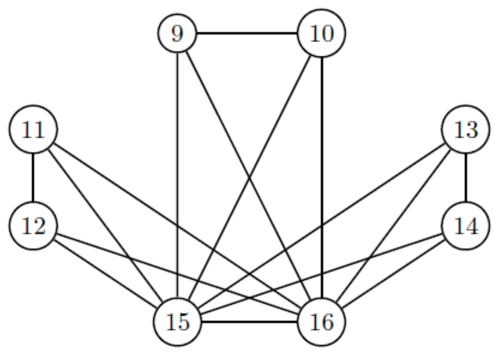
Exercice 1.62. Soit $G = (V, E)$ un graphe simple non orienté connexe tel que $\#V \geq 3$. Notons $\overline{G}$ le graphe complémentaire de G. Prouver que si $\overline{G}$ n'a pas de sous-graphe triangulaire, alors G a un chemin hamiltonien.

Exercice 1.63. Lesquels des quatre graphes suivants sont hamiltoniens ?

(a)

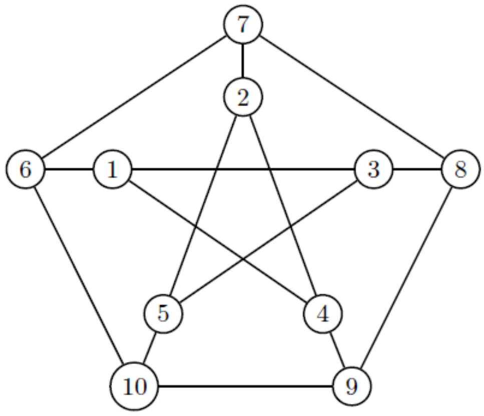


(b)



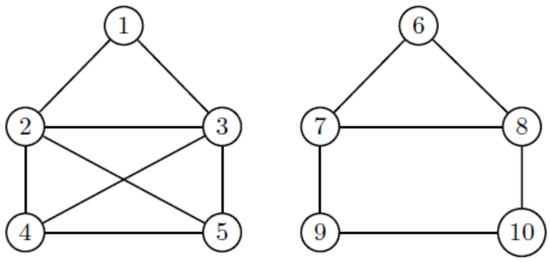
(c) Il s'agit du graphe non orienté dont l'ensemble des nœuds est $\{0, 1, 2\}^3$ et pour lequel le nœud $x = (x_1, x_2, x_3)$ et le nœud $y = (y_1, y_2, y_3)$ sont reliés par une arête si et seulement si deux des trois nombres $|x_1 - y_1|$,$|x_2 - y_2|$ et $|x_3 - y_3|$ sont nuls et que le troisième vaut 1.

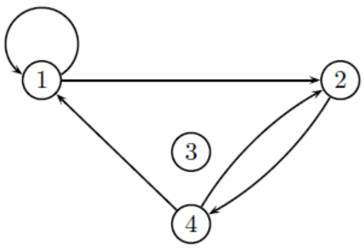
(d) Il s'agit du graphe de Petersen.



2 Étude algébrique

Exercice 2.1. En respectant la numérotation des sommets, écrire la matrice d'adjacence des deux multi-graphes suivants, le premier étant non orienté, et le second étant orienté.

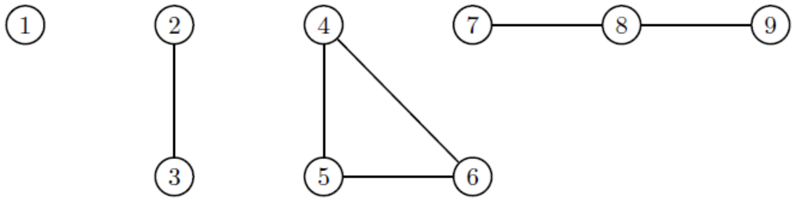




Exercice 2.2. Prouver qu'il n'existe pas de graphe simple non orienté dont la matrice d'adjacence (pour une numérotation quelconque des nœuds) possède une ligne qui n'est la transposée d'aucune de ses colonnes.
(Juin 2007, question 0b)

Exercice 2.3.
(a) Écrire la matrice d'adjacence d'un graphe non orienté en forme de carré (pour une numérotation quelconque de ses nœuds) et trouver son polynôme caractéristique.
(b) Écrire la matrice d'adjacence du graphe K_n (pour une numérotation quelconque de ses nœuds) et trouver son polynôme caractéristique.

Exercice 2.4. Trouver le plus directement possible le polynôme caractéristique du graphe non orienté suivant.



Exercice 2.5. À isomorphisme près, trouver tous les graphes simples non orientés ayant un polynôme caractéristique de la forme $\lambda^4 + a\lambda^2 - 4\lambda + b$ où a et b sont des nombres entiers.

Exercice 2.6. Prouver qu'il n'existe pas de graphe simple non orienté connexe ayant un polynôme caractéristique de la forme $\lambda^6 - 6\lambda^4 - 4\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c$ où a, b et c sont des nombres entiers.

Exercice 2.7. On considère un graphe simple non orienté non complet ayant un polynôme caractéristique de la forme $-\lambda^7 + x\lambda^5 + a\lambda^4 + b\lambda^3 + c\lambda^2 + d\lambda + e$ où a, b, c, d, e et x sont des nombres entiers. Quelles valeurs extrêmes x peut-il atteindre ?

Exercice 2.8. On considère le graphe K_3. On note A et B deux de ses nœuds (distincts). Trouver, au moyen de la matrice d'adjacence du graphe, le nombre de chemins de longueur n partant du nœud A et arrivant au nœud B.

Exercice 2.9. Trouver, au moyen de sa matrice d'adjacence, le nombre de chemins fermés de longueur k du graphe complet K_n.

Exercice 2.10. On considère le graphe biparti complet $K_{3,3}$.

(a) Prouver que 0 est une valeur propre de multiplicité 4 de ce graphe.
(b) Prouver que 3 est la plus grande valeur propre de ce graphe.
(c) Prouver que -3 est une valeur propre de ce graphe.
(d) Prouver que si les valeurs propres de ce graphe sont $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$, alors le nombre de chemins fermés de longueur n ($n \geq 1$) partant d'un sommet donné de ce graphe est $(\lambda_1^n + \lambda_2^n + \lambda_3^n + \lambda_4^n + \lambda_5^n + \lambda_6^n)/6$.
(e) Déterminer exactement le nombre de chemins ouverts de longueur 8 partant d'un sommet donné de ce graphe.

Suggestion : De simples arguments théoriques peuvent suffire et éviter des calculs aux points a,b,c.
Rappel : Un chemin $(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ de longueur n ($n \geq 1$) est fermé si $v_0 = v_n$ et ouvert si $v_0 \neq v_n$.
(Juin 2006, question 2)

Exercice 2.11.

(a) Trouver le nombre de chemins de longueur 8 du graphe simple non orienté triparti complet $K_{2,2,2}$.
(b) Trouver le nombre de chemins fermés de longueur n ($n \geq 1$) du graphe simple non orienté triparti complet $K_{2,2,2}$.

Exercice 2.12. On considère le graphe non orienté biparti complet $K_{a,b}$ où a et b sont deux nombres entiers strictement positifs.

(a) Combien existe-t-il d'automorphisme(s) sur ce graphe ?
(b) Si on note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{a+b}$ les valeurs propres de ce graphe, prouver qu'il possède exactement $\lambda_1^n + \lambda_2^n + \cdots + \lambda_{a+b}^n$ chemins fermés de longueur n ($n \geq 1$).
(c) Prouver que 0 est une valeur propre de ce graphe si $a + b > 2$, et déterminer sa multiplicité.
(d) Déterminer le nombre de chemins fermés de longueur 1 et le nombre de chemins fermés de longueur 2 de ce graphe, puis les dernières valeurs propres de ce graphe.

Exercice 2.13. Soit n un entier strictement positif. On considère le graphe simple non orienté triparti complet $K_{n,n,n}$. On note A la matrice d'adjacence de ce graphe (pour une numérotation quelconque de ses sommets).

(a) Que vaut la somme des multiplicités algébriques des valeurs propres non nulles de la matrice A ?
(b) Calculer la somme des $(3n)$ valeurs propres de la matrice A.
(c) Calculer la somme des carrés des $(3n)$ valeurs propres de la matrice A.
(d) Calculer la somme des cubes des $(3n)$ valeurs propres de la matrice A.
(e) Déterminer toutes les valeurs propres de la matrice A.

Remarque : L'ordre des réponses aux points (a), (b), (c), (d), (e) est libre. Obtenir la réponse du point (e) rend les autres points très faciles à traiter, mais il est probablement globalement plus simple de déduire la réponse du point (e) à partir des réponses des quatre autres points.
(Août 2008, question 2)

Exercice 2.14. Soit n un paramètre entier strictement positif, en fonction duquel les réponses doivent être discutées. Soit C_{2n} un ensemble de n arêtes, deux à deux sans sommet commun, du graphe non orienté complet K_{2n}. Soit G_n le graphe défini, à isomorphisme près, par $G_n = K_{2n} - C_{2n}$.

(a) Combien le graphe G_n possède-t-il d'automorphismes ? Combien de composantes connexes le graphe G_n possède-t-il ? Est-il eulérien ? Est-il hamiltonien ?
(b) Trouver les valeurs propres du graphe G_n avec leur multiplicité.

Exercice 2.15. Soit n un paramètre entier strictement positif, en fonction duquel les réponses doivent être discutées. Soit C_{3n} l'ensemble des arêtes de n sous-graphes triangulaires disjoints du graphe non orienté complet K_{3n}. Soit G_n le graphe défini par $G_n = K_{3n} - C_{3n}$.

(a) Trouver toutes les valeurs propres du graphe G_n avec leur multiplicité.
(b) Combien le graphe G_n possède-t-il d'automorphismes ?
(c) Le graphe G_n est-il hamiltonien ?

(Mai 2009, questions 1A, 1Ba, 1Bb)

Exercice 2.16. Soit n un paramètre entier strictement positif, en fonction duquel les réponses doivent être discutées. Soit C_{4n} l'ensemble des arêtes de n sous-graphes, isomorphes au graphe complet K_4 et deux à deux disjoints, du graphe non orienté complet K_{4n}. Soit G_n le graphe défini par $G_n = K_{4n} - C_{4n}$. Pour $n > 1$, le graphe G_n est donc isomorphe au graphe n-parti complet $K_{\underbrace{4,\ldots,4}_{n \text{ indices}}}$.

(a) Combien le graphe G_n possède-t-il d'arêtes ?
(b) Le graphe G_n est-il hamiltonien ?
(c) Trouver toutes les valeurs propres du graphe G_n avec leur multiplicité.

(Août 2009, questions 1a, 1b, 1e)

Exercice 2.17. Soient k et n deux entiers strictement positifs. On considère un graphe simple non orienté k-régulier de n nœuds pour lequel il existe toujours un et un seul chemin de longueur inférieure ou égale à 2 entre deux nœuds distincts. On note A la matrice d'adjacence de ce graphe (pour une numérotation quelconque de ses sommets).

(a) Donner la plus grande valeur propre de la matrice A et un des vecteurs propres relatifs à cette valeur propre.
(b) Prouver que tous les éléments de la matrice $A^2 + A + (1-k)I$ sont des 1.
(c) Prouver qu'un graphe vérifiant les conditions de l'énoncé ne peut exister que si $n = k^2 + 1$.
(d) Dessiner un graphe vérifiant les conditions de l'énoncé pour $(k, n) = (3, 10)$.

(Juin 2007, question 2)

Exercice 2.18. Soient k et n deux entiers strictement positifs. On considère un graphe simple non orienté k-régulier de n nœuds pour lequel il existe toujours un et un seul chemin simple de longueur inférieure ou égale à 3 entre deux nœuds distincts. On note A la matrice d'adjacence de ce graphe (pour une numérotation quelconque de ses sommets).

(a) Dessiner un graphe vérifiant les conditions de l'énoncé pour $(k, n) = (2, 7)$.

(b) Quelle est, en fonction de k, la plus grande valeur propre de la matrice A ?

(c) Prouver que chaque ligne de la matrice $A^3+A^2+A+(1-k)I$ possède exactement k composantes égales à $2k$ et $(n-k)$ composantes égales à 1.

(d) Prouver qu'un graphe vérifiant les conditions de l'énoncé ne peut exister que si $n = k^3 - k^2 + k + 1$.

(e) Dans un graphe vérifiant les conditions de l'énoncé pour $k = 10$, quelle est, en moyenne, la distance entre les deux extrêmités d'un chemin de longueur 4 ?

(a,b,c,d (mais pas e) : Juin 2008, question 3)

Exercice 2.19. On considère le graphe de Petersen et sa matrice d'adjacence A (pour une numérotation quelconque des sommets de ce graphe).

(a) Donner la plus grande valeur propre de la matrice A, ainsi qu'un de ses vecteurs propres.

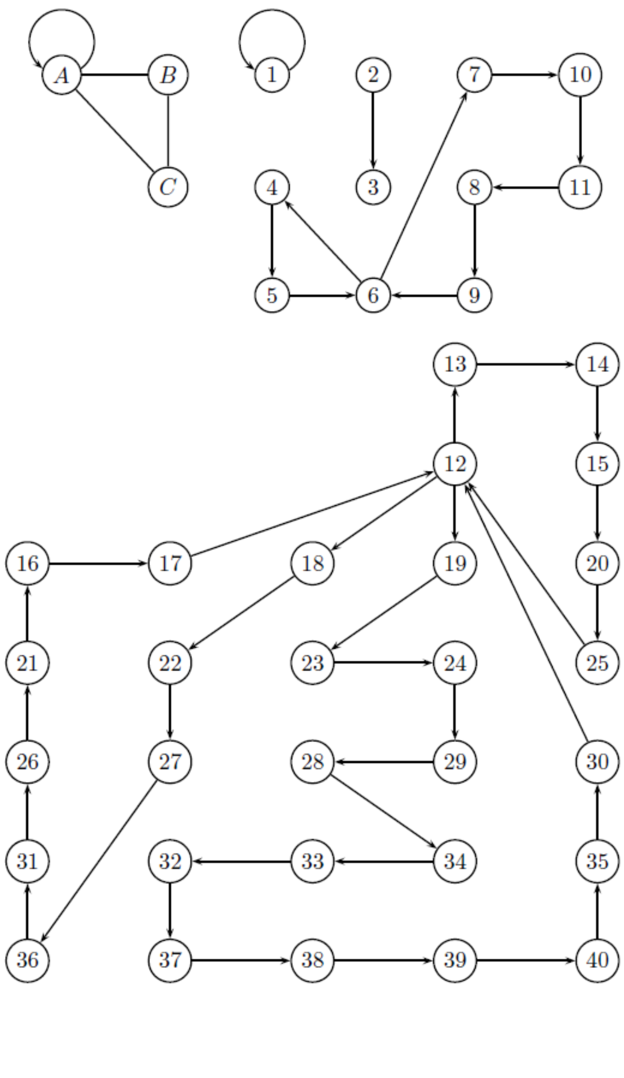
(b) Démontrer que toutes les coordonnées de la matrice $A^2 + A - 2I$ sont égales à 1.

(c) Diagonaliser la matrice $A^2 + A - 2I$ et en déduire que chaque valeur propre de la matrice A appartient à l'ensemble $\{-2, 1, 3\}$.

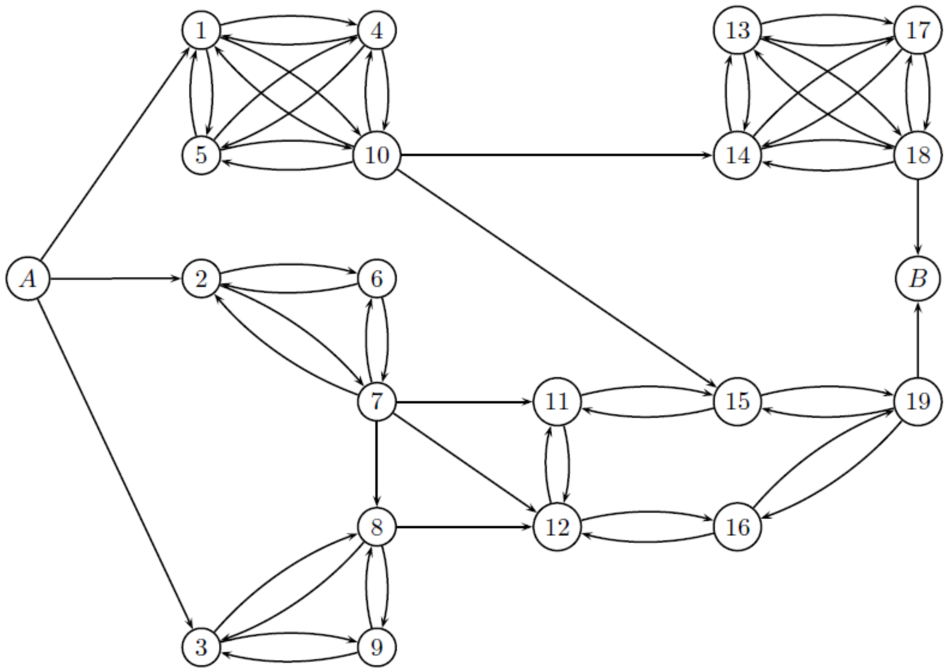
(d) Déterminer la multiplicité de chaque valeur propre de la matrice A.

(e) Déterminer le nombre de chemins fermés de longueur 100 du graphe de Petersen.

Exercice 2.20. Parmi les cinq graphes suivants (un seul est non orienté), lesquels ont une matrice d'adjacence qui est irréductible ? Lesquels en ont une qui est primitive ?



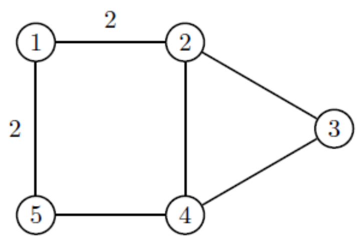
Exercice 2.21. On considère le graphe orienté suivant. On demande d'évaluer le plus rapidement possible, à un constante multiplicative (strictement positive) près, le comportement asymptotique du nombre de chemins de longueur n joignant le sommet A au sommet B (lorsque n tend vers l'infini).



Exercice 2.22.

(a) Trouver le nombre de sous-arbres couvrants du multi-graphe non orienté suivant.

(b) Le nombre de sous-arbres couvrants changerait-il si on rajoutait des boucles sur certains nœuds ?



Exercice 2.23. Trouver le nombre de sous-arbres couvrants du graphe biparti complet $K_{3,3}$.

Exercice 2.24. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Représenter le graphe orienté D ayant M comme matrice d'adjacence.
(b) Déterminer les composantes fortement connexes du graphe D.
(c) Renuméroter les sommets de D de telle sorte que la matrice d'adjacence correspondante soit bloc-triangulaire composée (supérieure ou inférieure).
(d) Déterminer les valeurs propres de D. Exprimer, en fonction de celles-ci, le nombre de chemins fermés de longueur n dans D.
(e) Prouver que la matrice M n'est ni primitive, ni irréductible. Est-il possible de remplacer un unique élément de la matrice M pour la rendre irréductible ? Si oui, énumérer toutes les possibilités. Même question pour la rendre primitive.
(f) (BONUS) Si c_n dénote le nombre de chemins de longueur n joignant les deux sommets de D réalisant le diamètre de D, prouver que c_n satisfait, pour tout $n \geq 0$ la relation

$$c_{n+4} = 2\,c_{n+3} + c_{n+2} - 2\,c_{n+1} - c_n.$$

(Janvier 2015, question 3)

Exercice 2.25. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Représenter le graphe orienté D ayant M comme matrice d'adjacence.
(b) Déterminer les composantes fortement connexes du graphe D.
(c) Prouver que la matrice M n'est ni primitive, ni irréductible. Est-il possible d'ajouter un unique arc au graphe D pour rendre la matrice correspondante irréductible ? Si oui, énumérer toutes les possibilités. Même question pour la rendre primitive.
(d) En supposant les sommet de D numérotés de façon compatible avec M, montrer que, pour tout n, les nombres de chemins de longueur n joignant 3 à 2, 4 à 3, 2 à 4 sont égaux. (Bonus : montrer que cette quantité est aussi égale au nombre de chemins de longueur n joignant 2 à 1.)

(Janvier 2016, question 3)

Exercice 2.26. On considère la matrice

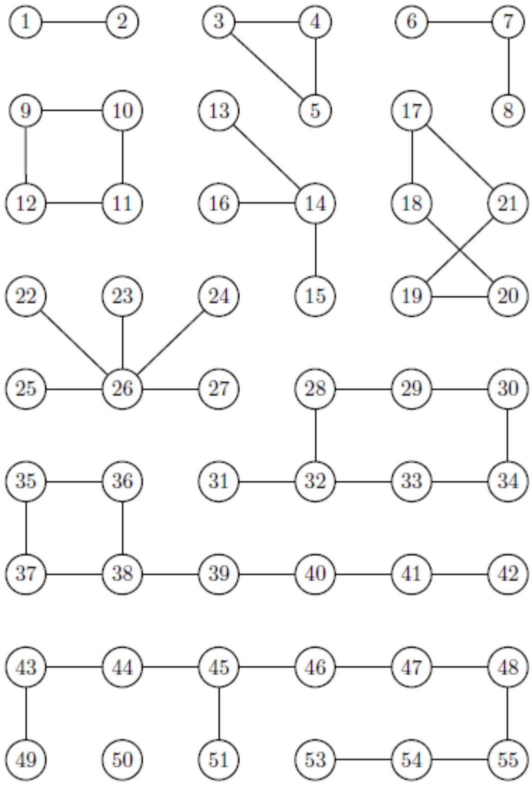
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Représenter le graphe orienté D ayant M comme matrice d'adjacence.
(b) Prouver que la matrice M est primitive. Est-il possible de supprimer un unique arc au graphe D pour rendre la matrice correspondante irréductible mais non primitive ?
(c) Soit α la valeur propre de Perron de M. Quels renseignements peut-on tirer de M^n quand n tend vers l'infini ? (Un énoncé théorique suffit pour répondre à la question.)
(d) En supposant les sommets de D numérotés de façon compatible avec M, montrer que, pour tout $n \geq 4$, le nombre de chemins fermés partant et arrivant en 1 de longueur $n + 4$ est égal à la somme des nombres de chemins fermés partant et arrivant en 1 de longueur n et ceux de longueur $n + 1$. En déduire le nombre de tels chemins fermés de longueur 16 passant par 1.

(Janvier 2017, question 3)

3 Graphes planaires

Exercice 3.1. Regrouper par classe d'homéomorphie les onze graphes non orientés suivants, et préciser lesquels sont planaires.



Exercice 3.2. Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, le graphe complet K_n est-il planaire ?

Exercice 3.3. *(cf. Exercice 2.15)* Le graphe $G_n = K_{3n} - C_{3n}$ est-il planaire ?
(Mai 2009, question 1Bc)

Exercice 3.4. *(cf. Exercice 2.16)* Le graphe $G_n = K_{4n} - C_{4n}$ est-il planaire ?
(Août 2009, question 1c)

Exercice 3.5. Prouver qu'il n'existe pas de graphe simple non orienté planaire qui possède exactement 6 nœuds dont 3 au moins sont de degré 5.
(Juin 2007, question 0c)

Exercice 3.6. Trouver le nombre maximum A d'arêtes qu'un graphe simple planaire de 6 nœuds peut avoir ? Donner une représentation planaire d'un graphe de 6 nœuds et A arêtes.

Exercice 3.7. Prouver que les graphes simples non orientés suivants n'existent pas ou en dessiner une représentation planaire.

(a) Un graphe planaire ayant exactement deux faces, toutes triangulaires.
(b) Un graphe planaire ayant exactement cinq faces, toutes triangulaires.
(c) Un graphe planaire ayant exactement six faces, toutes triangulaires. *(Juin 2008, question 4)*
(d) Un graphe planaire ayant exactement huit faces, toutes triangulaires.

Exercice 3.8.

(a) Est-il possible de numéroter les arêtes d'un octaèdre régulier de 1 à 12 de façon à ce que la somme des numéros des arêtes aboutissant en un sommet soit indépendante du sommet choisi ?
(b) Est-il possible de numéroter les arêtes d'un cube de 1 à 12 de façon à ce que la somme des numéros des arêtes aboutissant en un sommet soit indépendante du sommet choisi ?

Exercice 3.9. On considère une représentation planaire d'un graphe ayant exactement 300 faces, toutes triangulaires.

(a) Déterminer les nombres A d'arêtes et S de sommets de ce graphe.
(b) Comparer la somme des degrés des nœuds de ce graphe avec celle de son dual.
(c) Trouver la plus grande valeur de n pour laquelle il existe un graphe vérifiant l'énoncé et dont le dual possède une face qui est un polygone ayant n côtés.

Exercice 3.10. Un ballon de football peut être vu comme un polyèdre convexe dont chaque face est hexagonale ou pentagonale. Sachant que chaque sommet de ce polyèdre appartient à exactement deux faces hexagonales et une face pentagonale, déterminer les nombres S de sommets, A d'arêtes, H de faces hexagonales et P de faces pentagonales de ce polyèdre.

Exercice 3.11. On considère un polyèdre convexe qui a exactement six faces carrées et huit faces triangulaires. Chaque sommet de ce polyèdre est le sommet du même nombre c de carrés et du même nombre t de triangles. Trouver c, t, le nombre d'arêtes et le nombre de sommets de ce polyèdre.

Exercice 3.12. On considère un graphe et une de ses représentations planaires dont chaque sommet est un sommet d'exactement une face triangulaire, deux faces carrées et une face pentagonale. Déterminer le nombre de sommets S, le nombre d'arêtes A, le nombre de faces triangulaires T, le nombre de faces carrées C et le nombre de faces pentagonales P de ce graphe.
(Juin 2006, question 3)

Exercice 3.13. On considère un graphe et une de ses représentations planaires dont chaque face est triangulaire et possède un nœud de degré 3 et deux nœuds de degré 6. Déterminer le nombre N_3 de nœuds de degré 3, le nombre N_6 de nœuds de degré 6, le nombre A d'arêtes et le nombre F de faces de ce graphe, en justifiant soigneusement chaque mise en équation. Dessiner une représentation planaire de ce graphe.
(Juin 2007, question 3)

Exercice 3.14. On considère une représentation planaire d'un graphe. Sachant que chaque face de celle-ci est un quadrilatère ayant exactement un nœud de degré 3, deux nœuds de degré 4 et un nœud de degré 5, touver son nombre d'arêtes.
(Juin 2008, question 5)

Exercice 3.15. On considère un graphe planaire dont les représentations planaires n'ont que des faces pentagonales et dont celles de son dual n'ont que des faces triangulaires. Trouver le nombre de faces, le nombre d'arêtes et le nombre de sommets de ce graphe et en dessiner une représentation planaire.
(Août 2008, question 3)

Exercice 3.16. On considère un graphe planaire dont les représentations planaires n'ont que des faces triangulaires et dont celles de son dual n'ont que des faces quadrilatérales. Trouver le nombre de faces, le nombre d'arêtes et le nombre de sommets de ce graphe et en dessiner une représentation planaire.
(Août 2009, question 3)

Exercice 3.17. On considère une représentation planaire $\mathscr{A}$ d'un graphe G qui est le squelette d'un polyèdre convexe et une représentation planaire $\mathscr{B}$ du dual de G. Toutes les faces de $\mathscr{A}$ sont des octogones ou des triangles. Toutes les faces de $\mathscr{B}$ sont des triangles dont exactement un nœud est de degré strictement inférieur à 6. Trouver le nombre de sommets du graphe G et dessiner une représentation planaire de ce dernier.

Exercice 3.18. On considère une représentation planaire $\mathscr{R}$ d'un graphe G qui est le squelette d'un polyèdre convexe et une représentation planaire $\mathscr{R}^*$ du dual de G. On suppose que $\mathscr{R}$ et $\mathscr{R}^*$ ont le même nombre de faces triangulaires et que toutes leurs autres faces sont quadrilatérales. Soient T, Q et A les nombres respectifs de faces triangulaires, de faces quadrilatérales et d'arêtes du graphe $\mathscr{R}$.

(a) Exprimer A en fonction de T et Q.
(b) Prouver que $\mathscr{R}$ et $\mathscr{R}^*$ ont le même nombre de faces quadrilatérales.
(c) Exprimer T et Q en fonction de A.
(d) Dessiner une représentation planaire dans le cas particulier $T = Q = 4$.

(Mai 2009, question 3)

Exercice 3.19. On considère un graphe planaire connexe G ayant huit faces triangulaires et dix-huit faces carrées. De chaque sommet de G partent une face triangulaire et trois faces carrées. Déterminer le nombre de sommets et le nombre d'arêtes de G.
(Janvier 2016, question 4)

Exercice 3.20. On considère un graphe planaire connexe G ayant trente faces limitées par quatre arêtes. De chaque sommet de G partent trois ou cinq faces. Déterminer le nombre total de sommets et le nombre d'arêtes de G. Déterminer également le nombre de sommets de degré 3 et 5 respectivement.
(Août 2016, question 4)

Exercice 3.21. On considère un graphe planaire connexe G ayant 32 faces triangulaires et 6 faces carrées. De chaque sommet de G partent quatre faces triangulaires et une face carrée. Déterminer le nombre de sommets et le nombre d'arêtes de G.
(Janvier 2017, question 4)

Exercice 3.22. On considère un graphe planaire connexe G ayant 20 faces triangulaires et 12 faces pentagonales. De chaque sommet de G partent deux faces triangulaires et deux faces pentagonales. Déterminer le nombre de sommets et le nombre d'arêtes de G.
(Août 2017, question 4)

Exercice 3.23. (Solides de Platon) Un polyèdre est dit *régulier* si toutes ses faces sont des polygones réguliers ayant le même nombre de côtés (autrement dit, les faces sont toutes identiques) et si de chacun de ses sommets part le même nombre d'arêtes. Un *solide de Platon* est un polyèdre régulier convexe. Démontrer qu'il n'y a que cinq solides de Platon : le tétraèdre régulier (ou pyramide), l'hexaèdre régulier (ou cube), l'octaèdre régulier, le dodécaèdre régulier et l'icosaèdre régulier. Rechercher aussi aussi les duaux de ces solides.

Exercice 3.24. On considère un polyèdre convexe de trente-deux faces, toutes triangulaires ou pentagonales. Chaque sommet de ce polyèdre rencontre le même nombre t de face(s) triangulaire(s) et le même nombre p de face(s) pentagonale(s). Trouver les valeurs de t et de p, ainsi que les nombres d'arêtes et de sommets de ce polyèdre.

Exercice 3.25. On considère un polyèdre convexe de trente-huit faces, toutes carrées ou triangulaires. Chaque sommet de ce polyèdre rencontre le même nombre c de face(s) carrée(s) et le même nombre t de face(s)triangulaire(s). Trouver les valeurs de c et de t, ainsi que les nombres d'arêtes et de sommets de ce polyèdre.

4 Coloriages [2]

Exercice 4.1.

(a) Peut-on colorier chaque arête du graphe K_5 en rouge ou en bleu de façon à ne pas avoir de sous-graphe triangulaire dont les trois arêtes sont de la même couleur ?

(b) Peut-on colorier chaque arête du graphe K_6 en rouge ou en bleu de façon à ne pas avoir de sous-graphe triangulaire dont les trois arêtes sont de la même couleur ?

(c) Peut-on colorier chaque arête du graphe K_{17} en rouge, en bleu ou en jaune de façon à ne pas avoir de sous-graphe triangulaire dont les trois arêtes sont de la même couleur ?

(d) Trouver un nombre n pour lequel vous pouvez prouver qu'on ne peut pas colorier chaque arête du graphe K_n en rouge, en bleu, en jaune ou en vert de façon à ne pas avoir de sous-graphe triangulaire dont les trois arêtes sont de la même couleur.

2. Il ne s'agit que de graphes simples non orientés.

Exercice 4.2. On considère un multi-graphe G non orienté et sans boucle. On se demande s'il est possible de colorier ses arêtes avec deux couleurs, rouge et bleu, de façon à ce que chacun de ses nœuds rencontre autant d'arêtes rouges que d'arêtes bleues.

(a) Prouver que cela n'est possible pour aucun multi-graphe G de 2009 arêtes.

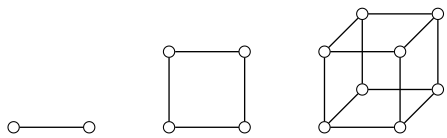
(b) Prouver que cela est possible pour tout multi-graphe G de 12 arêtes, qui est connexe et dont chacun des nœuds est de degré pair.

(c) Donner un exemple pour lequel c'est impossible malgré le fait que G a 12 arêtes et que chacun de ses nœuds est de degré pair.

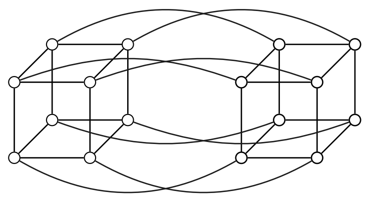
(d) Cela est-il possible pour tout multi-graphe G de 12 arêtes et dont chacun des nœuds est de degré multiple de 4 ?

(Juin 2009, question 2)

Exercice 4.3. Soit $n \geq 1$. Le *n-cube* Q_n est un graphe défini comme suit. Ci-dessous, sont représentés tout d'abord les graphes Q_1, Q_2 et Q_3 :



Pour tout $n \geq 1$, on obtient Q_{n+1} en considérant deux copies disjointes de Q_n et en ajoutant une arête pour chaque paire de sommets qui se correspondent dans les deux copies de Q_n. Voici une représentation de Q_4 :



(a) En fonction de n, combien de sommets et d'arêtes possède Q_n ? Quel est le degré de chaque sommet de Q_n ?

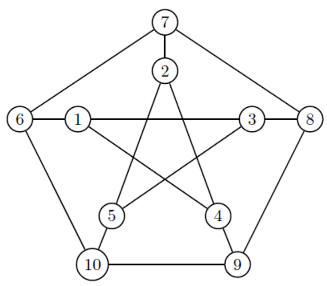
(b) Pour quelles valeurs de n, le n-cube est-il hamiltonien ?

(c) Pour quelles valeurs de n, le n-cube est-il eulérien ?

(d) Prouver que, pour tout $n \geq 1$, Q_n est un graphe 2-colorable. En déduire que Q_n est biparti.

(Janvier 2015, question 2)

Exercice 4.4. On considère le graphe de Petersen $P = (V, E)$.



(a) Montrer que P contient un *chemin* hamiltonien.

(b) On considère le graphe obtenu en supprimant un sommet quelconque de P. Ce nouveau graphe possède-t-il un circuit hamiltonien ?

(c) Le graphe P est-il Eulérien ?

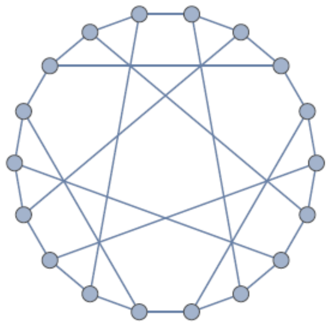
(d) Déterminer le nombre minimum de couleurs nécessaires pour avoir un coloriage propre des sommets de P.

(e) L'*excentricité* d'un sommet u est défini comme $\epsilon(v) = \max_{u \in V} d(v, u)$. Le *rayon* du graphe est défini comme $\min_{v \in V} \epsilon(v)$. Que vaut le rayon de P ?

(f) Donner la matrice d'adjacence de P. Vérifier (un argument simple suffit) que 3 en est une valeur propre.

(Août 2015, question 2)

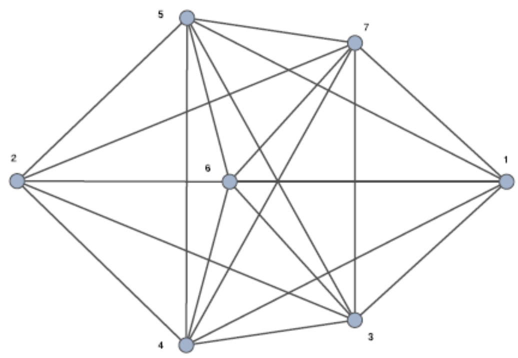
Exercice 4.5. Soit le *graphe de Pappus* G représenté ci-dessous.



(a) Ce graphe est-il hamiltonien ?
(b) Ce graphe est-il eulérien ?
(c) Montrer que G est un graphe 2-colorable. En déduire que G est biparti.
(d) Montrer, sans calcul, que 3 est valeur propre et que 4 n'est pas valeur propre de G.

(Janvier 2016, question 2)

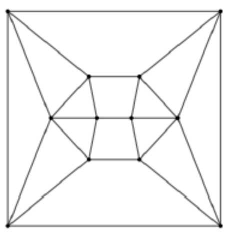
Exercice 4.6. Soit le *graphe de Turan* G représenté ci-dessous.



(a) Ce graphe est-il hamiltonien ?
(b) Ce graphe est-il eulérien ?
(c) Ce graphe est-il planaire ?
(d) Fournir la matrice d'adjacence de ce graphe.
(e) Sachant que les valeurs propres sont $-1, 0, 2+\sqrt{14}, 2-\sqrt{14}$, peut-on en déduire que ce graphe est biparti ?
(f) Expliquer pourquoi il n'existe aucun coloriage propre des sommets du graphe avec moins de 6 couleurs. Donner un coloriage propre de G avec 6 couleurs.
(g) La matrice d'adjacence est-elle primitive ?

(Août 2016, question 5)

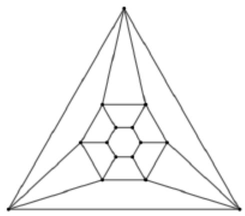
Exercice 4.7. Soit le graphe G à 12 sommets représenté ci-dessous.



(a) Ce graphe est-il hamiltonien ? Quelle est sa fermeture ?
(b) Ce graphe est-il eulérien ?
(c) Montrer que G est un graphe 4-colorable qui n'est pas 3-colorable.
(d) Ajouter au plus 3 arêtes au graphe pour qu'il ne soit plus planaire.
(e) Représenter le dual de cette représentation planaire de G. Quel est le nombre minimum de couleurs à utiliser pour colorer les faces de cette représentation planaire de G, des faces adjacentes recevant des couleurs distinctes ?

(Janvier 2017, question 2)

Exercice 4.8. Soit le graphe G à 15 sommets représenté ci-dessous.



(a) Ce graphe est-il hamiltonien ? Quelle est sa fermeture ?

(b) Ce graphe est-il eulérien ? S'il ne l'est pas, ajouter au plus 3 arêtes pour le rendre eulérien.

(c) Montrer que G est un graphe 3-colorable (pour les sommets) qui n'est pas 2-colorable.

(d) Ce graphe est-il biparti ?

(e) Représenter le dual de cette représentation planaire de G. Quel est le nombre minimum de couleurs à utiliser pour colorer les faces de cette représentation planaire de G, des faces adjacentes recevant des couleurs distinctes ?

(Août 2017, question 2)

Examen écrit de théorie des graphes
Janvier 2018

Consignes : Il est attendu que les réponses fournies soient clairement justifiées. La clarté, la rédaction et la justification des réponses fournies interviennent dans la cotation.

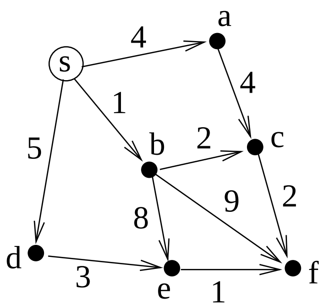
Bon travail !

Théorie (**uniquement** pour les étudiants ayant passé le projet)

(1) Démontrer que le graphe complet K_5 n'est pas planaire.

(2) Définir les notions de graphe biparti, de tri topologique d'un graphe orienté, d'homomorphisme de graphes, de matrice primitive.

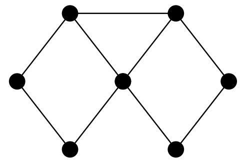
(3) Appliquer l'algorithme de Dijkstra au graphe orienté et pondéré suivant, source s. On considérera les itérations successives de l'algorithme en fournissant les valeurs des variables $T(v)$ et $C(v)$ pour chaque sommet $v \neq s$ (poids actuel et chemin réalisé pour le sommet v)



Exercices (**pour tous**)

(1) (5 points) Soit G un graphe simple. Le *graphe ligne* de G, noté $L(G)$, est construit comme suit : à chaque arête de G correspond un sommet de $L(G)$. Deux arêtes de G sont adjacentes (i.e., ont une extrémité en commun) si et seulement si les sommets correspondants de $L(G)$ sont voisins.

(a) Tracer le graphe ligne associé au graphe suivant :



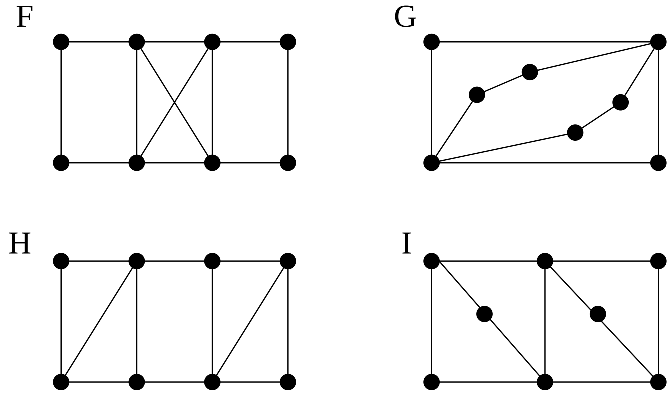
(b) Montrer que si G est eulérien, alors $L(G)$ est hamiltonien.

(c) Soit $\{u, v\}$ une arête de G. A cette arête, correspond un sommet de $L(G)$. Comment exprimer le degré de ce sommet de $L(G)$ à partir des degrés de u et v dans G ?

(d) Montrer que si G est eulérien, alors $L(G)$ est eulérien.

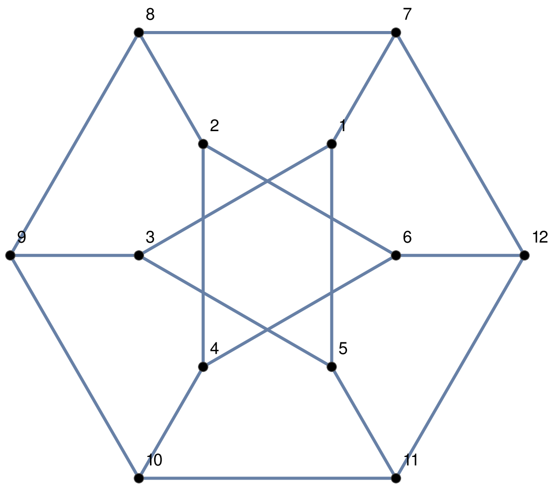
(e) Donner un exemple de graphe G qui n'est ni hamiltonien, ni eulérien et pour lequel $L(G)$ est hamiltonien.

(2) (5 points) On considère les 4 graphes ci-dessous.



(a) Parmi ces graphes, lesquels sont eulériens ? Justifier.
(b) Parmi ces graphes, lesquels sont hamiltoniens ? Justifier.
(c) Pour chaque graphe, combien de couleurs sont nécessaires pour avoir un coloriage propre des sommets ?
(d) Retirer un nombre minimum d'arêtes à H pour en faire un arbre.

(3) (5 points) On considère le *graphe de Dürer* représenté ci-dessous



(a) Donner la matrice d'adjacence M de ce graphe.
(b) Prouver que cette matrice M est primitive (*Suggestion* : il n'est pas nécessaire d'en calculer explicitement des puissances).
(c) Sans faire le calcul, pourquoi les éléments diagonaux de M^2 sont-ils tous égaux à 3 ?
(d) Même question avec M^3, pourquoi ses éléments diagonaux sont-ils égaux soit à 2, soit à 0 ?
(e) Sachant que le diamètre du graphe vaut 4 (i.e., la distance entre deux sommets quelconques est au plus 4 et il existe deux sommets dont la distance est exactement 4), quel renseignement pouvez-vous tirer sur les puissances de M ?

(4) (5 points) On considère un graphe planaire connexe G ayant 80 faces triangulaires et 12 faces pentagonales. De chaque sommet de G partent quatre faces triangulaires et une face pentagonale. Déterminer le nombre de sommets et le nombre d'arêtes de G. Justifier votre raisonnement.

Examen écrit de théorie des graphes
Août 2018

Consignes : Il est attendu que les réponses fournies soient clairement justifiées. La clarté, la rédaction et la justification des réponses fournies interviennent dans la cotation.

Bon travail !

Théorie (**uniquement** pour les étudiants ayant passé le projet)

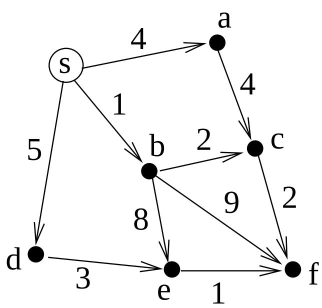
(1) Décrire l'algorithme du PageRank :
   a) Quel est le modèle de graphe retenu ?
   b) Définir le PageRank d'une page.
   c) Quelles sont les matrices construites, jusqu'à l'obtention de la "matrice de Google" ? Quelles sont leurs éventuelles propriétés ?
   d) Comment est réalisé le calcul des PageRanks et sur quels résultats mathématiques se base-t-il ?

(2) Définir les notions et, à chaque fois, donner un exemple de
   a) graphe biparti,
   b) tri topologique d'un graphe orienté,
   c) graphe eulérien,
   d) graphe planaire.

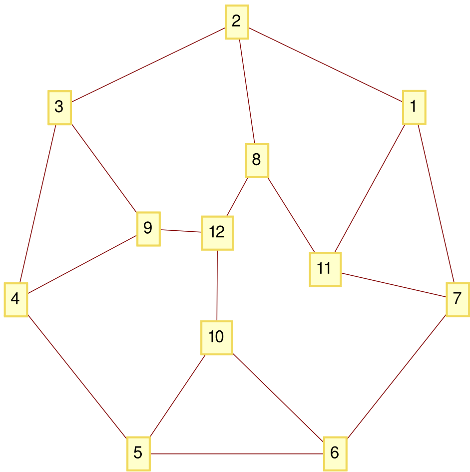
Exercices (**pour tous**)

(1) (5 points)
   a) Soit G un graphe simple connexe et non-orienté. Prouver que si G contient exactement un sommet de degré 1, alors G contient un piste fermée (on n'utilise pas deux fois la même arête).
   b) Prouver qu'un graphe H simple et non-orienté est une forêt (union disjointe d'arbres) si et seulement si tout sous-graphe induit de H contient un sommet de degré au plus 1.

(2) (5 points) Appliquer l'algorithme de Dijkstra au graphe orienté et pondéré suivant, de source s. On considérera les itérations successives de l'algorithme en fournissant les valeurs des variables $T(v)$ et $C(v)$ pour chaque sommet $v \neq s$ (poids actuel et chemin réalisé pour le sommet v)



(3) (5 points) On considère le *graphe de Frucht* représenté ci-dessous.



(a) Donner la matrice d'adjacence M de ce graphe.
(b) Prouver que cette matrice M est primitive. (*Suggestion* : il n'est pas nécessaire d'en calculer explicitement des puissances.)
(c) Sans faire le calcul, pourquoi les éléments diagonaux de M^2 sont-ils tous égaux à 3 ?
(d) Même question avec M^3, pourquoi ses éléments diagonaux sont-ils égaux soit à 2, soit à 0 ? On précisera lesquels sont nuls.
(e) Prouver que ce graphe est hamiltonien.
(f) Est-il eulérien ?

(4) (5 points) On considère un graphe planaire connexe G ayant 32 faces triangulaires et 6 faces carrées. De chaque sommet de G partent quatre faces triangulaires et une face carrée. Déterminer le nombre de sommets et le nombre d'arêtes de G. Justifier votre raisonnement.

Examen de théorie des graphes — Janvier 2019

Consignes : Il est attendu que les réponses fournies soient clairement justifiées. La clarté, la rédaction et la justification des réponses fournies interviennent dans la cotation. Feuilles distinctes pour théorie et exercices !

- Pour les étudiants **n'ayant PAS présenté** le projet.

Th. 1 Enoncer et démontrer le théorème de Dirac.

Th. 2 Donner un exemple de graphe non orienté possédant au moins deux cycles dont la matrice d'adjacence est irréductible, mais pas primitive. Pour cet exemple, quelle en est la période ?

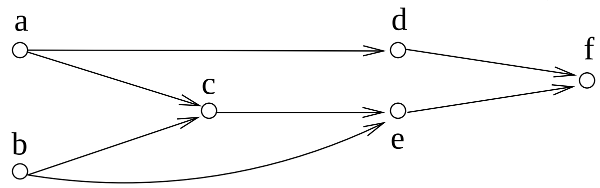
Th. 3 Enoncer une caractérisation algébrique des graphes bipartis.

Th. 4 Définir les nombres de Ramsey. Expliquer pourquoi $R(3,3) > 5$? Comment généraliser les nombres de Ramsey à plus de 2 couleurs ?

- Pour les étudiants **ayant présenté** le projet.

Th. 1 Définir la notion de graphe hamiltonien. Donner un exemple de graphe hamiltonien et un exemple de graphe non hamiltonien. Ces graphes auront au moins 6 sommets.

Th. 2 Fournir tous les tris topologiques du graphe ci-dessous (il y en a 7) :



Th. 3 a) Définir la notion de matrice primitive.

b) La matrice suivante est-elle primitive ? (plusieurs justifications sont possibles)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

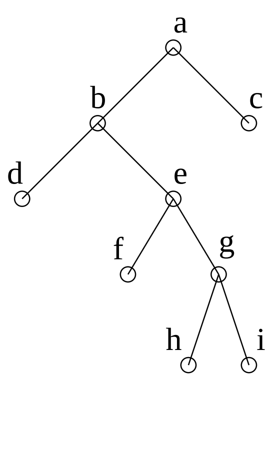
c) Sachant que ses valeurs propres sont

$$\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right) \simeq 1,618;\ \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right) \simeq -0,618;\ 0$$

quels renseignements tirez-vous sur M^n quand $n \to \infty$?

d) Représenter le graphe orienté ayant M pour matrice d'adjacence.

Th. 4 Donner les parcours préfixe, infixe et suffixe de l'arbre ci-dessous

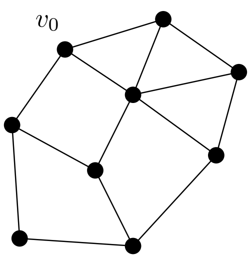


• • Pour **TOUS** les étudiants — partie exercices

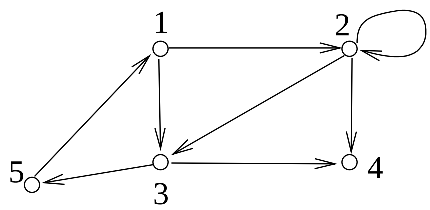
Ex. 1 On considère l'algorithme suivant auquel on fournit en entrée un graphe simple non orienté $G = (V, E)$. Pour rappel, $\nu(u)$ dénote l'ensemble des voisins de u.

```
Considérer un sommet quelconque v0 ∈ V
Composante:= {v0},  New:= {v0},  Aretes:= ∅
Tant que New≠ ∅
  Voisins:= ∅
  pour tout sommet u appartenant à New
    Voisins:= Voisins ∪ ν(u)
  New:= Voisins\Composante
  pour tout sommet v appartenant à New
    sélectionner une arête {v, w} telle que w ∈Composante
    ajouter cette {v, w} à Aretes
  Composante:= Composante ∪ New
```

a) Appliquer l'algorithme au graphe ci-contre.
b) Après l'exécution de cet algorithme, que contient `Composante` ? Justifier.
c) quelles propriétés possède le graphe (`Composante`,`Aretes`) obtenu ? Justifier.
d) Dans quelle situation « réelle » pourrait-on utiliser cet algorithme ?



Ex. 2 On donne le graphe orienté ci-dessous



a) Donner sa matrice d'adjacence A.
b) Donner les éléments de la diagonale de A^3. Justifier.
c) Quel est le nombre minimum d'arc(s) à ajouter pour rendre le graphe fortement connexe ? Fournir ce(s) arc(s).
d) Donner un chemin simple de longueur maximale. Justifier.
e) Avec les notations du cours, si ce graphe est vu comme un ensemble de pages Web et de liens, donner les matrices H (hyperliens) et S (stochastique) utilisées dans l'algorithme du PageRank. Comment calculerait-on la matrice G utilisée par Google (une formule détaillée suffit).

Ex. 3 On considère un graphe planaire connexe G ayant 8 faces triangulaires et 18 faces carrées. De chaque sommet de G partent trois faces carrées et une face triangulaire. Déterminer le nombre de sommets et le nombre d'arêtes de G. Justifier votre raisonnement.

Ex. 4 a) Prouver que dans un graphe simple connexe (non orienté) deux chemins simples de longueur maximale ont toujours un sommet commun.
b) Prouver que si un graphe possède exactement deux sommets de degré impair, alors ces sommets sont connectés par un chemin.

Examen de théorie des graphes — Août 2019

<u>Consignes</u> : Il est attendu que les réponses fournies soient clairement justifiées. La clarté, la rédaction et la justification des réponses fournies interviennent dans la cotation. Feuilles distinctes pour théorie et exercices !

- Pour les étudiants **n'ayant PAS présenté** le projet.

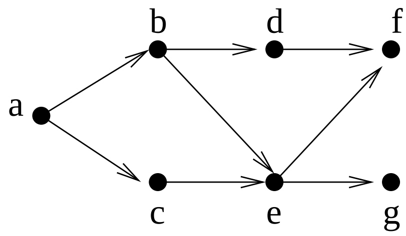
Th. 1 Enoncer et <u>démontrer</u> une caractérisation algébrique des graphes bipartis.

Th. 2 Donner un exemple de graphe non orienté possédant au moins deux cycles dont la matrice d'adjacence est irréductible, mais pas primitive. Pour cet exemple, quelle en est la période ?

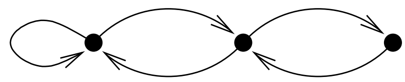
Th. 3 Enoncer le théorème de Dirac.

- Pour les étudiants **ayant présenté** le projet.

Th. 1 Fournir tous les tris topologiques du graphe suivant.



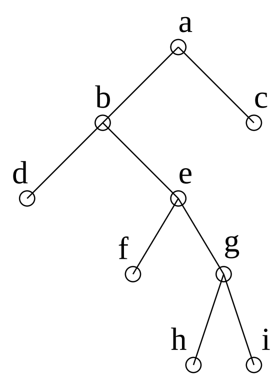
Th. 2 Pourquoi peut-on affirmer que le graphe suivant est primitif ?



Sachant que les valeurs propres de la matrice d'adjacence M du graphe sont $\lambda_1 \simeq 1.8$, $\lambda_2 \simeq -1.25$ et $\lambda_3 \simeq 0.44$, quel renseignement peut-on tirer sur M^n si $n \to +\infty$.

Th. 3 Pour des graphes ayant au moins 8 sommets, donner un exemple de graphe planaire et un exemple de graphe non planaire (justifier vos choix).

Th. 4 Donner les parcours préfixe, infixe et suffixe de l'arbre ci-dessous



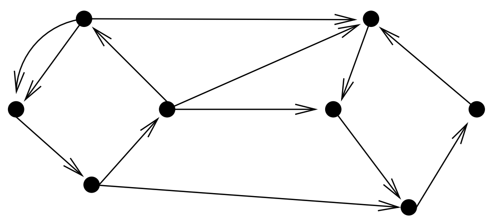
• • Pour **TOUS** les étudiants — partie exercices

Ex. 1 Au Sudoku 4×4, le but du jeu est de remplir les cases avec des chiffres allant de 1 à 4 en veillant toujours à ce qu'un même chiffre ne figure qu'une seule fois par colonne, une seule fois par ligne, et une seule fois par carré de quatre cases (la grille étant composée de 4 tels carrés disjoints). Par exemple, une grille valide est donnée par

1	3	2	4
4	2	3	1
3	4	1	2
2	1	4	3

a) Modéliser le Sudoku 4×4 par un graphe à 16 sommets de telle sorte que les grilles valides correspondent exactement aux coloriages valides de ce graphe avec 4 couleurs (des sommets voisins reçoivent des couleurs distinctes). Combien ce graphe possède-t-il d'arêtes ?
b) Le graphe obtenu est-il eulérien ? Justifier.
c) Montrer qu'il est hamiltonien en fournissant un circuit convenable.
d) Existe-t-il une valeur de k telle qu'il soit k-régulier ? En fonction de votre réponse, que pouvez-vous dire de la valeur propre de plus grand module (de la matrice d'adjacence) ?

Ex. 2 On donne le graphe orienté ci-dessous



a) Donner sa matrice d'adjacence A.
b) Quel est le plus petit entier $n > 0$ tel que tous les éléments de la diagonale de A^n sont > 0 ? Que trouve-t-on sur cette diagonale ? Justifier.
c) Quelles sont les composantes fortement connexes du graphe ?
d) Quel est le nombre minimum d'arc(s) à ajouter pour rendre le graphe fortement connexe ? Fournir ce(s) arc(s).
e) Donner un chemin hamiltonien pour ce graphe (bonus : donner <u>tous</u> les chemins hamiltoniens).

Ex. 3 Soit un graphe planaire connexe possédant uniquement des faces triangulaires et carrées. Chaque sommet appartient exactement à une face carrée et 4 faces triangulaires. Déterminer le nombre de sommets, d'arêtes et de faces de ce graphe. Justifier votre raisonnement.

Ex. 4 Dans une forêt formée de $k \geq 1$ arbres disjoints, quelle relation existe-t-il entre le nombre total de sommets et d'arêtes ? Justifier votre réponse.

Examen de théorie des graphes — Janvier 2020

Consignes : Il est attendu que les réponses fournies soient clairement justifiées. La clarté, la rédaction et la justification des réponses fournies interviennent dans la cotation. Feuilles distinctes pour théorie et exercices !

- Pour les étudiants **n'ayant PAS présenté** le projet.

Th. 1 Répondez à une des deux questions ci-dessous, AU CHOIX

1.1 Enoncer et démontrer une caractérisation (condition nécessaire et suffisante) des graphes bipartis connexes par leur spectre.

1.2 Définir les nombres de Ramsey et prouver qu'ils existent.

Th. 2 Donner un exemple de graphe orienté possédant au moins deux automorphismes non triviaux distincts (donnez ces automorphismes).

Th. 3 Que peut-on dire du comportement asymptotique de A^n quand A est une matrice primitive ? Précisez le contexte et les notations utilisées.

Th. 4 Qu'est que la fermeture d'un graphe ? Donner deux graphes à 6 sommets (ditincts de K_6) dont la fermeture est/n'est pas K_6.

Th. 5 Donnez un exemple de graphe simple orienté fortement connexe dont la période vaut 3 et qui contient au moins 8 sommets. Expliquez votre construction.

Th. 6 Soit G un graphe orienté possédant n sommets et ℓ arcs. On définit un graphe H obtenu à partir de trois copies distinctes de G, notées G_1, G_2 et G_3. Ainsi H a $3n$ sommets. Pour définir H, on y ajoute encore, un arc joignant chaque sommet de G_i à chaque sommet de G_j si et seulement si $i < j$.

a) Combien H possède-t-il d'arcs (en fonction de n et ℓ) ?

b) Connaissant le spectre de G, que savez-vous du spectre du H ?

- Pour les étudiants **ayant présenté** le projet.

Th. 1 Définir la notion de tri topologique. Décrivez une méthode (ou un algorithme) permettant d'obtenir un tel tri. Appliquez-là à un graphe de votre choix ayant 5 sommets.

Th. 2 Donnez une condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe orienté soit eulérien.

Th. 3 Justifier que dans un graphe simple connexe $G = (V, E)$, on a toujours $\#E \geq \#V - 1$.

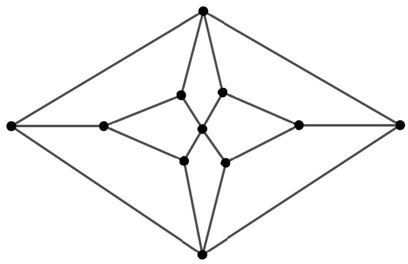
Th. 4 Donnez un exemple de graphe simple orienté fortement connexe dont la période vaut 3 et qui contient au moins 8 sommets. Expliquez votre construction.

Th. 5 On admettra que, dans un graphe à $n \geq 2$ sommets, s'il existe un chemin entre deux sommets alors il existe un chemin de longueur au plus $n - 1$ (ce résultat est donc supposé connu).

A partir de la matrice d'adjacence A d'un graphe orienté, comment détecter si un graphe est ou non fortement connexe ? Quels « calculs » allez-vous réaliser ? Justifier votre démarche.

• • Pour **TOUS** les étudiants — partie exercices

Ex. 1 On considère le graphe suivant (appelé *graphe de Herschel*).



a) Ce graphe est-il eulérien ? (Justifier votre réponse)
b) Est-il hamiltonien ? Possède-t-il un chemin hamiltonien ? (Si oui, fournir un circuit/chemin hamiltonien ; si non, justifier.)
c) Est-il biparti ? Si oui, fournir une partition convenable de l'ensemble des sommets.
d) Peut-on lui appliquer la formule d'Euler ? Si oui, le faire.
e) Quel est le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorier les arêtes de ce graphe de telle sorte que des arêtes adjacentes reçoivent des couleurs distinctes.

Bonus) Ce graphe est-il le squelette d'un polyèdre convexe ?

Ex. 2 Si A est une matrice à coefficients naturels, on définit la matrice $T(A)$ de même dimension et à coefficients dans $\{0, 1\}$, de sorte que $[T(A)]_{i,j} = 1$ si et seulement si $A_{i,j} > 0$. Par exemple,

$$\text{si } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ alors, } T(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Soit la matrice symétrique } M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Représenter les trois graphes non orientés ayant respectivement $M, T(M^2)$ et $T(M + M^2)$ comme matrice d'adjacence.
b) Sans effectuer le calcul de M^6, que vaut $T(M^6)$? Justifier.
c) Soit $k \geq 1$. D'une manière générale, si $T(A + A^2 + \cdots + A^k)$ contient un élément nul et si $T(A + A^2 + \cdots + A^k + A^{k+1})$ a tous ses éléments égaux à 1, quel(s) renseignement(s) tire-t-on sur le graphe associé à A ?

Ex. 3 On considère un graphe planaire, connexe et 3-régulier (chaque sommet est de degré 3). Toutes les faces de ce graphe sont des carrés, des hexagones ou des octogones. Chaque sommet appartient à la frontière d'une face de chacun des trois types. Déterminer le nombre de sommets, d'arêtes et de faces de chaque type.

Ex. 4 a) Démontrer qu'un arbre ayant au moins 3 sommets possède au moins deux *feuilles*, i.e., deux sommets de degré 1.
b) Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe (non orienté) ayant au moins 3 sommets. Démontrer qu'il existe deux sommets $u, v \in V$ tels que les trois graphes $G - u$, $G - v$, $G - \{u, v\}$ soient connexes.

Examen d'algèbre vendredi 15 janvier 2021
bacheliers en sc. mathématiques et informatiques

Consignes : Répondre à la théorie et aux exercices sur des feuilles distinctes. La clarté, la rédaction et la justification des réponses fournies interviennent dans la cotation. Enoncer les résultats utilisés. Fin de l'examen **15h30**. Bon travail.

- Pour les étudiants **ne présentant pas le projet**

1. Donner un exemple de graphe orienté à 4 sommets ne contenant pas de boucle (cycle de longueur 1) et dont la matrice d'adjacence est primitive — argumenter votre construction.

   Un circuit de 4 sommets $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$ plus un arc $2 \to 4$ suffit. En effet, le graphe est fortement connexe donc sa matrice est irréductible. De plus, sa période vaut 1 puisqu'on trouve (partant du sommet 1) un cycle de longueur 4 et un cycle de longueur 3. Donc le pgcd des longueurs vaut 1. On conclut en se rappelant qu'une matrice irréductible et apériodique (i.e., période 1) est primitive. Une alternative est de calculer une puissance suffisante (10) de la matrice d'adjacence.

2. Énoncer et démontrer le théorème de Dirac.

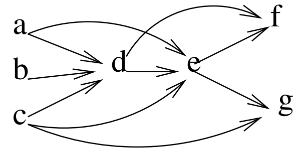
3. Justifier l'inégalité $R(3,3) > 5$ (concernant les nombres de Ramsey).

   Il faut exhiber un coloriage des arêtes d'un graphe complet à 3 (resp. 4, 5) sommets ne contenant aucun triangle monochromatique. Rappeler la définition du nombre de Ramsey $R(s,t)$.

- Pour les étudiants **ayant présenté le projet**

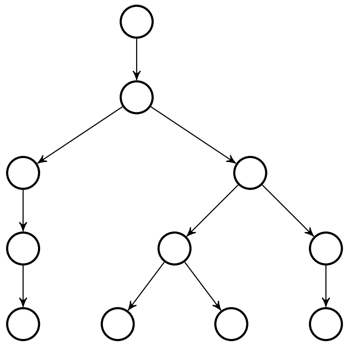
1. Construire un graphe simple orienté dont les 7 sommets sont a, b, c, d, e, f, g, ayant 10 arcs et possédant au moins les 3 tris topologiques
   $a < b < c < d < e < f < g$;
   $a < c < b < d < e < g < f$ et
   $b < a < c < d < e < g < f$.

   Un graphe répondant à la question est donné par :

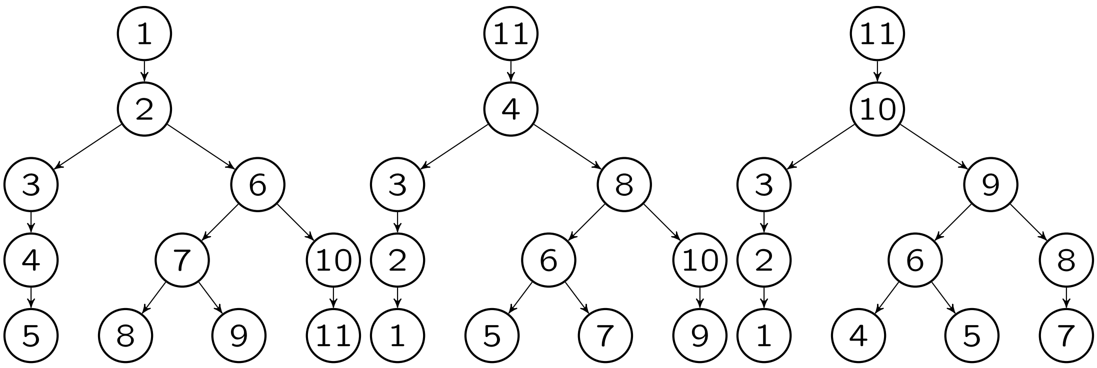


   Dans un tri topologique, s'il y a un arc $\alpha \to \beta$ alors, α sera énuméré avant β. Ne pas oublier de mettre 10 arcs.

2. Recopier l'arbre sur votre feuille (à trois reprises)



y placer les labels des sommets de telle sorte que l'énumération $1, 2, 3, \ldots, 10, 11$ soit préfixe, infixe puis suffixe. Si un sommet possède un seul fils, on suppose qu'il s'agit du fils de gauche.



3. Donner un exemple de graphe à 8 sommets hamiltonien mais non eulérien (justifier).

   Un cycle à 8 sommets auquel on ajoute une arête entre deux sommets non adjacents suffit. En effet, ces deux sommets sont alors de degré 3 (impair). Or un graphe est eulérien si et seulement si tous les sommets sont de degré pair. Puisqu'on a un cycle passant par les 8 sommets, le graphe est bien hamiltonien (circuit passant une et une seule fois par chaque sommet).

- Pour **TOUS** (exercices 20 points)

1. (5 points) On considère le graphe H formé de deux copies du graphe biparti complet $K_{3,3}$ auxquelles on ajoute une arête entre les sommets correspondants des deux copies (on ajoute ainsi 6 arêtes).

   a) Combien le graphe H possède-t-il d'arêtes ?

   Chaque copie de $K_{3,3}$ possède $3 \times 3 = 9$ arêtes. On a donc $9 + 9 + 6 = 24$ arêtes dans H.

b) Ce graphe est-il eulérien ? Justifier.

Dans $K_{3,3}$ chaque sommet est de degré 3, mais avec l'arête joignant les sommets correspondants des deux copies, chaque sommet de H est de degré 4. Ainsi, H est un graphe connexe dont tous les sommets sont de degré pair. C'est une caractérisation des graphes eulériens.

c) Est-il hamiltonien ? Si oui, donner un circuit hamiltonien.

Si une copie de $K_{3,3}$ a pour sommets $1, \ldots, 6$ et pour arêtes $\{i, j\}$ avec $1 \leq i \leq 3$ et $4 \leq j \leq 6$, on note les sommets correspondants dans la deuxième copie par $1', \ldots, 6'$. On a par exemple le circuit hamiltonien,

$$1 - 4 - 2 - 5 - 3 - 6 - 6' - 3' - 5' - 2' - 4' - 1' - 1.$$

d) Expliquer pourquoi 2 couleurs suffisent pour obtenir un coloriage propre des sommets de H.

Avec les notations du point précédent, $1, 2, 3, 4', 5', 6'$ peuvent recevoir une même couleur. Par définition de H, ces 6 sommets sont indépendants (pas d'arête entre eux). Il en va de même des sommets $4, 5, 6, 1', 2', 3'$.

e) Peut-on obtenir une représentation planaire du graphe ? Si oui, en fournir une. Si non, justifier.

Au vu du thm. de Kuratowski, puisque H contient $K_{3,3}$ comme sous-graphe, H ne peut pas être planaire. Alternative, il n'est même pas nécessaire de faire référence à Kuratowski : un graphe contenant un graphe non planaire comme sous-graphe ne peut être planaire.

2. (7 points) On considère un graphe non orienté formé d'un cycle de 5 sommets numérotés de 1 à 5 ainsi qu'une arête supplémentaire joignant les sommets 1 et 3.

a) Donner la matrice d'adjacence M du graphe.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Montrer qu'il y a 15 circuits de longueur 4 partant et arrivant dans le sommet 1.

Sans être élégant, on peut calculer la puissance 4ième de la matrice d'adjacence

$$\begin{pmatrix} 15 & 8 & 7 & 11 & 3 \\ 8 & 8 & 8 & 6 & 6 \\ 7 & 8 & 15 & 3 & 11 \\ 11 & 6 & 3 & 9 & 1 \\ 3 & 6 & 11 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

et l'élément dans le coin supérieur gauche compte le nombre de tels circuits (chemins de longueur 4 partant et revenant en 1).

c) Vérifier que le vecteur de composantes $v = (-1, 0, 1, -1, 1)$ est un vecteur propre de M. En déduire une valeur propre.

   On vérfiera (calculs à faire) que $M.v = (-2)v$ donc -2 est valeur propre.

d) La matrice est-elle irréductible ? Primitive ?

   Le graphe est fortement connexe et possède un circuit de longueur 3 et un circuit de longueur 5, ainsi, sa période vaut 1. Un graphe irréductible et apériodique est primitif. Si on a calculé la puissance 4ième de M au point b), une alternative est de voir que les éléments de cette matrice sont tous > 0.

e) Si on considère cette fois, un cycle de 6 sommets et une arête supplémentaire joignant les sommets 1 et 4, la matrice d'adjacence est-elle primitive ? Quelle est la période du graphe et de là, quels renseignements pouvez-vous obtenir sur l'existence de chemins de longueur n joignant les sommets 1 et 3 ?

   Contrairement au point précédent, même si le graphe reste connexe (la matrice est donc irréductible), les cycles que l'on peut trouver sont de longueur 4, 6, 8, etc. Ainsi, le pgcd des longueur de cycles vaut 2. (On a aussi, dans le cas non orienté, des cycles du type $1-2-1$ de longueur 2.) La période de ce graphe vaut 2, la matrice n'est pas primitive. Si un chemin existe entre les sommets 1 et 3, il est nécessairement de longueur paire. Plus précisément, les longueurs pour lesquelles on trouve au moins un tel chemin sont 2, 4 (avec, par exemple, $1-2-3-2-3$), 6, 8, 10, 12, etc. On met donc en évidence le thm. de structure vu au cours. On a un chemin de longueur $2n$ pour tout $n \geq 1$. On utilise autant que nécessaire des cycles de longueur 4 ou 6 du sommet 1 vers lui-même pour finir avec un chemin $1-2-3$.

3. (5 points) On considère un graphe planaire connexe G ayant 20 faces triangulaires et p faces pentagonales (où $p > 0$). De chaque sommet de G partent exactement 2 faces triangulaires et 2 faces pentagonales. Déterminer le nombre de sommets, d'arêtes et de faces pentagonales de G.

   On désigne par s, a, f respectivement le nombre de sommets, d'arêtes et de faces du graphe. Nous pouvons utiliser la formule d'Euler (graphe planaire et connexe),

$$s - a + f = 2.$$

   On note p le nombre de faces pentagonales. On a les relations suivantes (certaines sont redondantes) :

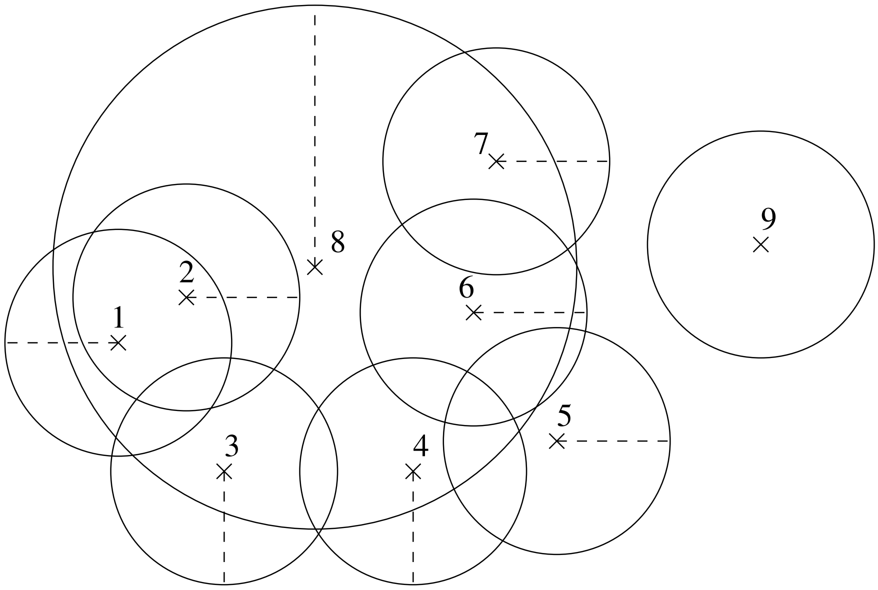
$$f = 20+p, \quad 4s = 2a, \quad 5p+3.20 = 2a, \quad 2s = 5p, \quad 2s = 3.20.$$

   La deuxième relation provient du fait que chaque sommet est de degré 4 (4 arêtes partent de chaque sommet mais chaque arête a 2 extrémités). La troisième relation exprime que les faces sont délimitées par 5 ou 3 arêtes et que chaque arête appartient à la frontière de 2 faces. La relation suivante exprime que chaque sommet appartient à la frontière de deux faces pentagonales (et chaque face pentagonale a, dans sa frontière, 5 sommets). Enfin, la dernière relation exprime que chaque sommet appartient à la frontière de 2 faces triangulaires (et chaque face triangulaire a, dans sa frontière, 3 sommets). Ce système d'équations linéaires a pour solution unique

$$s = 30, \quad p = 12, \quad a = 60, \quad f = 32.$$

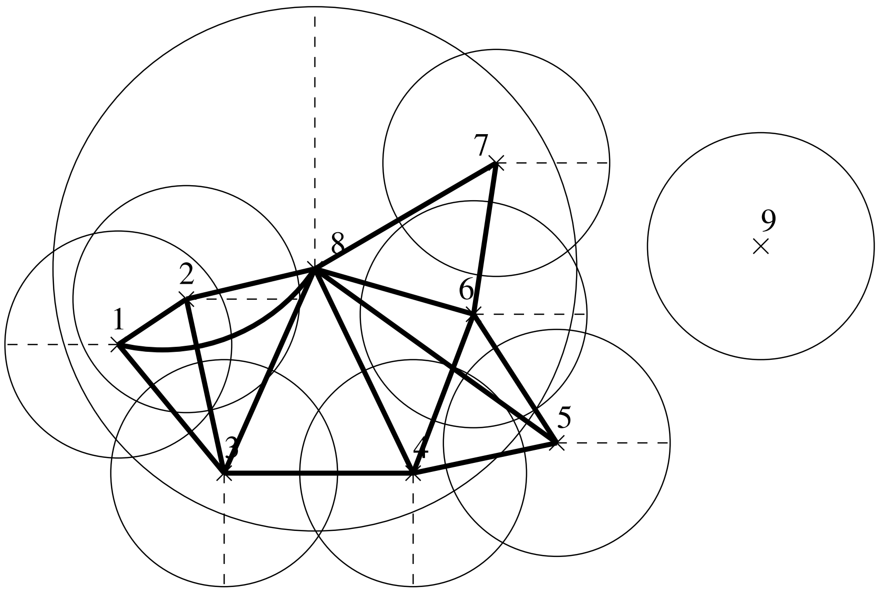
4. (3 points) On dispose de 9 émetteurs localisés géographiquement comme ci-dessous. Sur la figure, on a aussi représenté le rayon d'action spécifique de ceux-ci. On veut éviter les interférences : 2 émetteurs ayant une zone d'action commune doivent émettre sur des fréquences différentes.

   Minimiser le nombre de fréquences différentes à allouer pour éviter les interférences.



Modéliser ce problème en un problème de théorie des graphes : préciser votre choix de sommets et d'arêtes. Quelle notion est importante ? Ensuite, représenter le graphe correspondant et résoudre le problème ainsi traduit.

On considère un graphe à 9 sommets. Chaque sommet correspond à un émetteur. Une arête connecte deux sommets si et seulement si l'intersection des zones d'action des émetteurs correspondants est non vide.



Il s'agit d'un problème de coloriage propre. On a deux copies de K_4 ($\{1,2,3,8\}$ et $\{4,5,6,8\}$), il faut donc au minimum 4 couleurs. En fait, 4 couleurs suffisent: $\{1,4\}$, $\{2,5,7\}$, $\{3,6\}$ et $\{8,9\}$ sont 4 sous-ensembles de sommets indépendants. Il ne s'agit pas du seul coloriage possible. On assigne la même fréquence à tous les émetteurs recevant la même couleur.

Examen de théorie des graphes 21 janvier 2022
bacheliers en sc. mathématiques et informatiques

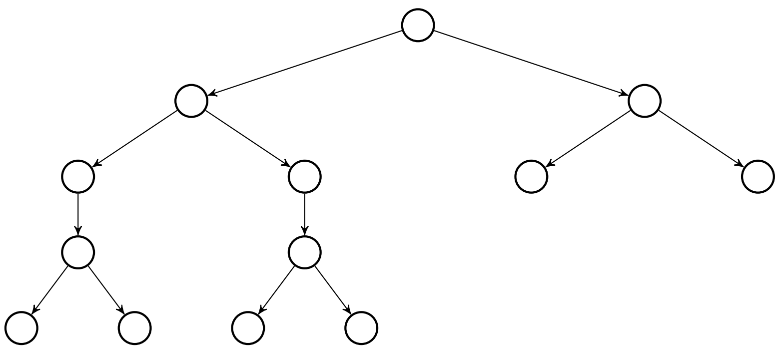
Consignes : Répondre à la théorie et aux exercices sur des feuilles distinctes. La clarté, la rédaction et la justification des réponses fournies interviennent dans la cotation. Enoncer les résultats utilisés. Lorsqu'une question contient plusieurs points, pour répondre à une partie, on admettra les points précédents. Fin de l'examen **17h30**. Bon travail.

- Pour les étudiants **ne présentant pas le projet**

1. Définir les notions de parcours préfixe et suffixe d'un arbre. Donner un exemple montrant que ces deux parcours sont différents.
2. Enoncer et démontrer le résultat caractérisant un graphe biparti par son spectre (condition nécessaire et suffisante).
3. Donner un exemple de graphe planaire montrant qu'il faut au moins 4 couleurs pour avoir un coloriage propre de ses faces.

- Pour les étudiants **ayant présenté le projet**

1. Recopier l'arbre sur votre feuille (à trois reprises)

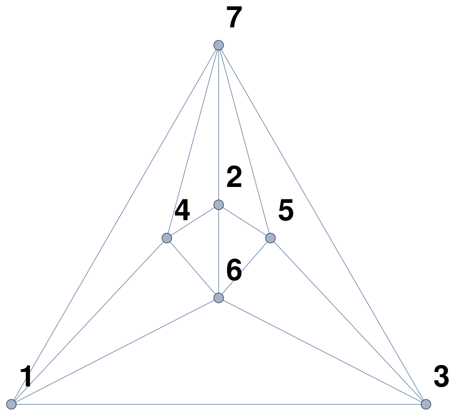


y placer les labels des sommets de telle sorte que l'énumération $1, 2, 3, \ldots, 10, 11$ soit préfixe, infixe puis suffixe. Si un sommet possède un seul fils, on suppose qu'il s'agit du fils de gauche.

2. Détailler les grandes étapes d'un algorithme (en français ou pseudo-code) permettant de tester si un multi-graphe non orienté est ou non eulérien.

- Pour **TOUS** (exercices 20 points)

1. (6 points) On considère le graphe G non orienté représenté ci-dessous.



   a) Ce graphe est-il eulérien ? Est-il hamiltonien ? Justifier. En cas de réponse positive, fournir un circuit convenable.
   b) Donner un coloriage propre des sommets du graphe utilisant un nombre minimum de couleurs.
   c) Ce graphe est-il biparti ? Justifier.
   d) Donner la matrice d'adjacence du graphe (pour la numérotation des sommets proposée).
   e) Cette matrice est-elle primitive ? On peut justifier sans en calculer des puissances.
   f) Combien y-a-t-il de circuits de longueur 3 démarrant et aboutissant dans le sommet 1 ? Même question avec le sommet 6.

2. (5 points) On considère un graphe planaire connexe G dont toutes les faces sont carrées, hexagonales ou décagonales $(4, 6, 10$ côtés). De chaque sommet partent une face de chacun des trois types. On note s le nombre de sommets, a le nombre d'arêtes et c, h, d le nombre de faces des différents types.

   a) Exprimer la formule d'Euler liant s, a, c, h, d.
   b) Quelle relation liant s et c déduisez-vous des données ?
   c) Quelle relation liant s et h pouvez-vous tirer ?

d) Quelle relation liant s et d pouvez-vous tirer ?

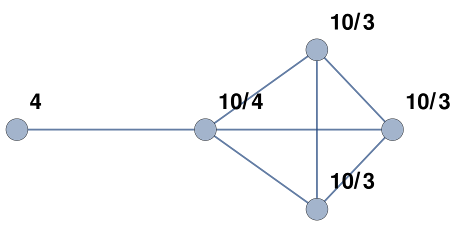
e) Quelle relation liant a et c, h, d pouvez-vous tirer ?

Enfin, déterminer les valeurs de s, a, c, h, d. (Suggestion : pour **vérifier** vos calculs, vous devez trouver un nombre total de faces de 62 — vous ne pouvez pas utiliser cette information telle quelle dans votre résolution.).

3. (5 points) Soit $G = (V, E)$ un graphe simple non orienté. Pour tout sommet v, on définit la fonction $f : V \to \mathbb{Q}$ comme la moyenne arithmétique des degrés des voisins de v, c'est-à-dire

$$f(v) = \frac{1}{\#\nu(v)} \sum_{x \in \nu(v)} \deg(x).$$

Pour rappel, $\nu(v)$ désigne l'ensemble des voisins de v. Si v est un sommet isolé, alors $f(v) = 0$. Un exemple est donné ci-dessous :



a) Si A est la matrice d'adjacence de G et si e désigne un vecteur colonne ne contenant que des 1, exprimer $f(v)$ à l'aide des composantes de $A\,e$ et $A^2\,e$.

b) Si G est le graphe complet K_n. Montrer que $f(v)$ est constant et déterminer cette constante.

c) Faire de même si G est un graphe k-régulier ($k \geq 2$). En quoi votre réponse est-elle cohérente avec le point précédent ?

d) Si G est le graphe biparti complet $K_{m,n}$, $m \geq n \geq 1$, quelle(s) valeur(s) peut prendre $f(v)$?

e) Soit r le degré maximal des sommets de G. Montrer que $f(v) \leq r$ pour tout sommet v. Donner une condition suffisante pour que la valeur maximale r puisse être atteinte ? Donner un exemple où elle est atteinte et un où elle ne l'est pas.

4. (4 points) Soit G un graphe simple orienté sans cycle possédant un *chemin* hamiltonien.

   a) Donner un exemple d'un tel graphe avec 6 sommets et 9 arcs.

   b) Justifier que ce chemin hamiltonien permet de définir un tri topologique des sommets

   c) Montrer que G possède un unique sommet u de demi-degré entrant nul.

   d) Montrer que $G - u$ possède encore un chemin hamiltonien.

   e) Déduire des deux points précédents que G possède un unique tri topologique.