Université de Liège Année académique 2022 – 2023

Mathématiques élémentaires

Bloc 1 – Sciences Physiques

Titulaire : Michel Rigo
m.rigo@uliege.be

Assistant.e.s : Safia Bennabi ; Antoine Renard
s.bennabi@uliege.be ; antoine.renard@uliege.be

1 Théorie des ensembles

Définition 1.1. Soit E un ensemble. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E, i.e.,

$$\mathcal{P}(E) = \{A : A \subset E\}.$$

Définition 1.2. Soient A et B deux ensembles. On note $A\Delta B$ la *différence symétrique* de A et B, i.e.,

$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Exercice 1.1. Soit E un ensemble. Démontrer les assertions suivantes.

(a) $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$, $\complement_E(A \cup B) = \complement_E A \cap \complement_E B$.
(b) $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$, $\complement_E(A \cap B) = \complement_E A \cup \complement_E B$.
(c) $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$, $(A \cap B = A \cup B) \Rightarrow A = B$.
(d) $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$, $A\Delta B = (A \cap \complement_E B) \cup (B \cap \complement_E A)$.
(e) $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E)$, $((A \cap B = A \cap C) \wedge (A \cup B = A \cup C)) \Rightarrow B = C$.
(f) $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E)$, $(A\Delta B)\Delta C = (C\Delta A)\Delta B$.
(g) $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E)$, $A = B \Leftrightarrow (A \cap \complement_E B) \cup (B \cap \complement_E A) = \emptyset$.

Définition 1.3. Soit E un ensemble. Des parties A_j $(j \in J)$ de E forment une *partition* de E si elles sont disjointes 2 à 2 et si leur union est égale à E.

Exercice 1.2. Soient $A_1, \ldots, A_n$ des parties d'un ensemble E. On note $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$. Démontrer que les ensembles

$$B_1 = A_1 \qquad \text{et} \qquad B_j = A_j \cap \complement_A \left(\bigcup_{i=1}^{j-1} A_i \right), j = 2, \ldots, n,$$

forment une partition de A.

Définition 1.4. Soient E et F deux ensembles. Le *produit cartésien* de E et F est l'ensemble

$$E \times F = \{(e, f) : e \in E \wedge f \in F\}.$$

Exercice 1.3. Démontrer que si A, B, C sont des ensembles non-vides tels que $A \subset C$, alors les ensembles

$$(C \setminus A) \times C, \quad A \times (C \setminus B) \quad \text{et} \quad A \times (C \cap B)$$

forment une partition de $C \times C$.

2 Nombres complexes

Exercice 2.1. Pour chacun des nombres complexes donnés ci-après, calculer la partie réelle, la partie imaginaire, le module et le conjugué.
(a) $z_0 = i$,
(b) $z_1 = -2$,
(c) $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$,
(d) $z_3 = 1 + i$,
(e) $z_4 = 2i + 3$,
(f) $z_5 = -5 - 4i$.

Exercice 2.2. Soient $z_1 = 2 + 3i$ et $z_2 = -1 + 2i$. Calculer $z_1 + z_2$ et $z_1.z_2$. Calculer l'inverse de z_1.

Exercice 2.3. Même question pour $z_1 = i$ et $z_2 = 1 + i$.

Exercice 2.4. Même question pour $z_1 = 2 + 2i$ et $z_2 = 1 - i$.

Exercice 2.5. Soient $z_1 = 3 + 2i$ et $z_2 = 4 - 3i$. Calculer $z_1 + z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\overline{z_1}$ et $\frac{z_1}{z_2}$.

Exercice 2.6. Mettre sous forme algébrique les quotients
(a) $\frac{3+i}{4-i}$,
(b) $\frac{i+5}{i-5}$,
(c) $\frac{1}{i}$,
(d) $\frac{5+3i}{4i+3}$.

Exercice 2.7. Soit $z = \frac{5-15i}{2-i}$. Mettre z sous forme algébrique et exponentielle (trigonométrique) et le représenter dans le plan complexe.

Exercice 2.8. Soit $z = 1 + i\sqrt{3}$. Calculer le module de z et mettre z sous forme exponentielle. Déterminer z^2 et $\frac{z^6}{32}$ et les représenter dans le plan complexe.

Exercice 2.9. Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes $z_1 = i$, $z_2 = -1 + i$, $z_3 = -1$ et $z_4 = \sqrt{3} + i$. Calculer le produit $z_1 \cdot z_2$ sous forme algébrique et sous forme trigonométrique ou exponentielle.

Exercice 2.10. Mettre sous forme algébrique les nombres $4e^{i\frac{\pi}{4}}$, $2e^{i\frac{3\pi}{2}}$ $4e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Exercice 2.11. Soit le nombre complexe $z = i - 1$. Ecrire z sous forme exponentielle. Déterminer z^2 et z^4 sous forme exponentielle et algébrique. Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}$ pour lesquels z^n est réel.

Exercice 2.12. Soit le nombre complexe $z = 1 + i$. Ecrire z sous forme exponentielle. Déterminer z^2 et z^4 sous forme exponentielle et algébrique. Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}$ pour lesquels z^n est réel.

Exercice 2.13. Calculer les deux racines carrées complexes de -1, $i - 1$, $3 + i$.

Exercice 2.14. Résoudre les équations suivantes dans le plan complexe :
(a) $z^2 + z + 1 = 0$,
(b) $(1 + i)z^2 + iz - 1 = 0$,
(c) $z^2 = 5 + 12i$,
(d) $z^3 = -1$,
(e) $z^4 + z^2 - 12 = 0$,
(f) $iz^2 + (2 + i)z - i + 1 = 0$.

Exercice 2.15. Résoudre l'équation $z^2 - 4z + 8 = 0$ dans les nombres complexes et représenter les solutions dans le plan complexe.

Exercice 2.16. Donner, pour chacun des nombres complexes suivants, sa partie réelle, sa partie imaginaire et son module.

$$z_1 = \frac{3 + 6i}{3 - 4i} \qquad z_2 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \qquad z_3 = \frac{2 + 5i}{1 - i} + \frac{2 - 5i}{1 + i}$$

Exercice 2.17. Écrire sous forme trigonométrique le nombre complexe suivant : $z = -\dfrac{4}{3}i$.

Exercice 2.18. Soient les nombres complexes $z_1 = \sqrt{3} - i$, $z_2 = -1 + i$, $z_3 = i$, $z_4 = 1 + \sqrt{3}i$ et $z_5 = 2 - 3i$.
(a) Donner les parties réelles et imaginaires de $z_1 z_2$, $\frac{z_1}{z_4}$ et z_3^2,
(b) Donner la forme trigonométrique de z_4, en déduire celle de z_4^6,
(c) Donner la forme trigonométrique de $\frac{z_1}{z_2}$, en déduire $\cos(\frac{11\pi}{12})$ et $\sin(\frac{11\pi}{12})$,
(d) Calculer $|z_1|$, $|z_1 z_2|$, $|\frac{z_1}{z_4}|$ et $|z_3^3|$.

Exercice 2.19. Représenter graphiquement le lieu des point $z \in \mathbb{C}$ tels que
(a) $z + \bar{z} = 1$,
(b) $z - \bar{z} = i$,
(c) $|z + i - 2| \geq 2$,
(d) $|z - 1| = |z + 1|$,
(e) $z + \bar{z} = |z|^2$,
(f) $z + \bar{z} = |z|$.

Exercice 2.20. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Déterminer les valeurs des sommes suivantes.
(a) $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$,
(b) $\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$,
(c) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cos(kx)$,
(d) $\sum_{k=0}^{n} \cos^k(x) \cos(kx)$,
(e) $\sum_{k=0}^{n} \cos^k(x) \sin(kx)$,
(f) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^{n-k} \frac{\cos(kx)}{\cos^k(x)}$.

Exercice 2.21. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 + 3z - 2i = 0$.

Exercice 2.22. Résoudre les équations suivantes, où $z \in \mathbb{C}$.
(a) $z^3 = -2$,
(b) $z^2 = 5 + 12i$,
(c) $z^4 = \frac{16\sqrt{2}}{1-i}$,
(d) $z^4 + z^2 - 12 = 0$,
(e) $z^3 = \bar{z}$,
(f) $(1 + i)z^2 + (1 - 5i)z - (4 - 2i) = 0$,
(g) $z^4 - (3 + 8i)z^2 - 16 + 12i = 0$,
(h) $4z^2 + 8|z|^2 - 3 = 0$,
(i) $(z^2 + 3z - 2)^2 + (2z^2 - 3z + 2)^2 = 0$,
(j) $(1 + i)z^2 - 2i\sqrt{2}z + (1 - i) = 0$.

Exercice 2.23. Dans quelles conditions la partie imaginaire du carré d'un complexe est-elle égale au carré de la partie imaginaire du complexe ?

Exercice 2.24. Représenter graphiquement le lieu des points $z \in \mathbb{C}$ tels que

$$|1 + iz| = |1 - iz|.$$

Exercice 2.25. Déterminer les solutions de

$$z^2 = -2 + 2i\sqrt{3}.$$

En déduire les solutions de

$$\left(\frac{z + i}{z - i}\right)^2 = -2 + 2i\sqrt{3}.$$

Exercice 2.26. Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ tel que $\alpha^5 = 1$.
(a) Donner tous les α qui vérifient cette condition.
(b) Montrer que $\sum\limits_{i=0}^{4} \alpha^i = 0$.