Université de Liège Année académique 2024 – 2025

Calcul matriciel

Solutions – Exercices en autonomie

Bloc 1 – Sciences Mathématiques & Physiques

Titulaire : Michel Rigo
m.rigo@uliege.be

Assistant.e.s : Antoine Renard ; Safia Bennabi
antoine.renard@uliege.be ; s.bennabi@uliege.be

Introduction

Ce document reprend les solutions des exercices proposés dans les sections "Exercices en autonomie" des différentes listes.

Lorsque le format de l'exercice s'y prête (réponse précise attendue), les solutions finales sont données. Dans le cas des exercices nécessitant la rédaction d'une preuve, des indications sont données. Notez aussi que dans certains cas, les solutions données ne sont pas uniques. Ainsi, ce n'est pas parce que vous n'obtenez pas la même réponse que celle présente dans ce correctif que votre raisonnement est erroné.

Bien sûr, même si les solutions sont données dans un but d'auto-correction, vous pouvez toujours nous rendre vos résolutions afin qu'on puisse les relire et vous donner un feedback (sur le raisonnement, la rédaction, etc.).

Notez aussi que ce document est une première version, et peut contenir des coquilles. N'hésitez pas à revenir vers nous en cas de doute. D'avance, un tout grand merci à tout qui participera à l'amélioration de ces solutions !

Bon travail,

Antoine Renard.

1 Signe sommatoire et symbole de Kronecker

Exercice 1.7. Il suffit de développer les sommes et de justifier, pour (a), par commutativité et associativité, et pour (b), par mise en évidence.

Exercice 1.8. Le résultat peut être démontré par récurrence sur $n \in \mathbb{N}_0$. De plus,

$$\sum_{i=0}^{m}(m-i)(n-i) = \frac{m(m+1)(3n-m+1)}{6}.$$

Exercice 1.9. On a

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{si } x \neq 1, \\ n+1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Exercice 1.10. On a

(a) $\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j}\delta_{j,k} = n$,

(b) $\sum_{k=1}^{n} kq^{k-1} = \begin{cases} \frac{nq^{n+1}-(n+1)q^n+1}{(1-q)^2} & \text{si } q \neq 1, \\ \frac{n(n+1)}{2} & \text{si } q = 1. \end{cases}$

Exercice 1.11. Le résultat peut être démontré par récurrence sur $n \in \mathbb{N}_0$.

Exercice 1.12. Il faut développer le membre de gauche et réécrire la somme de façon adéquate. Regarder les termes tels que $k = j$ et $k \neq j$ séparément peut être utile.

2 Matrices

Exercice 2.8. $\alpha = -1$ et $\beta = 3$.

Exercice 2.9. L'ensemble des solutions est donné par $\{-1, 2+\sqrt{6}, 2-\sqrt{6}\}$.

Exercice 2.10. Seul le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ convient.

Exercice 2.11. On a

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -2a & -2b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}, \quad G = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\frac{2a}{3} \\ c & -\frac{2c}{3} \end{pmatrix} : a, c \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{et} \quad H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & \frac{2a-b}{2} \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Aucune des inclusions impliquant deux des trois ensembles n'est vraies : $F \not\subset G$, $F \not\subset H$, $G \not\subset F$, $G \not\subset H$, $H \not\subset F$ et $H \not\subset G$ (un exemple de matrice appartenant au premier ensemble mais pas au deuxième peut à chaque fois être trouvé). Par contre, on a $F \cap G \subset H$, $F \cap H \subset G$ et $G \cap H \subset F$.

Exercice 2.12. Le résultat peut être démontré par récurrence sur $n \in \mathbb{N}_0$.

Exercice 2.13. $M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n \\ 1 \\ 3^n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2.14. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^{4n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{4n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix}, \quad A^{4n+2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1+i & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^{4n+3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & -i \end{pmatrix}.$$

On peut le montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2.15. Le résultat peut être démontré par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2.16. $[BA]_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = n, \\ \delta_{n-i-1,j} & \text{si } 1 \leq i \leq n-1. \end{cases}$

Exercice 2.17. On a $A^2 = A$.

Exercice 2.18. (a) $A^p = (\delta_{i+p,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

(b) L'indice de nilpotence de A est n.

Exercice 2.19. Si n est pair, les matrices qui commutent avec A sont de la forme

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1(n-1)} & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2(n-1)} & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{\frac{n}{2}1} & x_{\frac{n}{2}2} & \cdots & x_{\frac{n}{2}(n-1)} & x_{\frac{n}{2}n} \\ x_{\frac{n}{2}n} & x_{\frac{n}{2}(n-1)} & \cdots & x_{\frac{n}{2}2} & x_{\frac{n}{2}1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{2n} & x_{2(n-1)} & \cdots & x_{22} & x_{21} \\ x_{1n} & x_{1(n-1)} & \cdots & x_{12} & x_{11} \end{pmatrix}, \text{ avec } x_{ij} \in \mathbb{C} \text{ pour tous } i, j.$$

Si n est impair, alors les matrices qui commutent avec A sont de la forme

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1(n-1)} & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2(n-1)} & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{\frac{n-1}{2}1} & x_{\frac{n-1}{2}2} & \cdots & x_{\frac{n-1}{2}(n-1)} & x_{\frac{n-1}{2}n} \\ x_{\frac{n+1}{2}1} & x_{\frac{n+1}{2}2} & \cdots & x_{\frac{n+1}{2}2} & x_{\frac{n+1}{2}1} \\ x_{\frac{n-1}{2}n} & x_{\frac{n-1}{2}(n-1)} & \cdots & x_{\frac{n-1}{2}2} & x_{\frac{n-1}{2}1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{2n} & x_{2(n-1)} & \cdots & x_{22} & x_{21} \\ x_{1n} & x_{1(n-1)} & \cdots & x_{12} & x_{11} \end{pmatrix}, \text{ avec } x_{ij} \in \mathbb{C} \text{ pour tous } i, j.$$

Exercice 2.20. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$B^n = \begin{pmatrix} A^n & \mathbf{0} & nA^n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A^n & \mathbf{0} & nA^n \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A^n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & A^n \end{pmatrix}$$

On peut le montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2.21. Utiliser l'Exercice 2.18 pour réécrire les matrices M et N comme des polynômes en la matrice A (celle de l'Exercice 2.18), puis conclure.

3 Permutations

Exercice 3.4. (a) $\mu = \begin{pmatrix}1 & 9 & 13 & 7 & 10 & 8 & 4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & 12\end{pmatrix}$.

(b) $\operatorname{sign}(\mu) = -1$, μ est impair.

Exercice 3.5. (a) $\mu = \begin{pmatrix}1 & 3 & 4 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 5\end{pmatrix}$ et $\nu = \begin{pmatrix}1 & 4 & 7 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 6 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 9\end{pmatrix}$.

(b) $\mu = \begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 5\end{pmatrix}$ et $\nu = \begin{pmatrix}1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 9\end{pmatrix}$.

(c) $\operatorname{sign}(\mu) = 1$ et $\operatorname{sign}(\nu) = 1$.

(d) $\mu^{100} = \mathrm{id}$ et $\nu^{100} = \nu^4 = \begin{pmatrix}2 & 6 & 5\end{pmatrix}$.

Exercice 3.6. On a

$$\operatorname{sign}(\nu_1) = -1, \quad \operatorname{sign}(\nu_2) = -1, \quad \operatorname{sign}(\nu_3) = 1$$

et

$$\operatorname{sign}(\nu_4) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair et que } k = \frac{n}{2} \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Exercice 3.7. $\operatorname{sign}(\sigma_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 4k \text{ ou } n = 4k+1 \text{ pour un } k \in \mathbb{N} \\ -1 & \text{si } n = 4k+2 \text{ ou } n = 4k+3 \text{ pour un } k \in \mathbb{N} \end{cases}.$

Exercice 3.8. Pour f (le raisonnement est le même pour g), il faut montrer que

— la fonction est injective, *i.e.* $f(\mu) = f(\nu) \Rightarrow \mu = \nu$,

— la fonction est surjective, *i.e.* pour tout $\nu \in \mathcal{S}_n$, il existe $\mu \in \mathcal{S}_n$ tel que $f(\mu) = \nu$.

Pour ce faire, se rappeler que $\mathcal{S}_n$ est un groupe, et donc toute permutation admet un inverse.

Exercice 3.9. Il y a exactement $\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k}$ cycles de longueur k dans $\mathcal{S}_n$.

4 Déterminant, indépendance linéaire et rang d'une matrice

Exercice 4.14. On a

$$a = -4, \quad b = -(m+2)(m-1)^2, \quad c = (x-y)(y-z)(z-x) \quad \text{et} \quad d = 12.$$

Exercice 4.15. On a

$$\det(A) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \quad \text{et} \quad \det(B) = bc(bc - 4a^2).$$

Exercice 4.16. Procéder par récurrence. Ici, il est préférable de ne pas faire apparaître de zéros supplémentaires. Pour pouvoir utiliser l'hypothèse de récurrence, appliquer la loi des mineurs sur la dernière ligne ou colonne : l'un des termes pourra être directement calculé grâce à l'hypothèse de récurrence, et le second nécessitera une nouvelle application de la loi des mineurs sur une ligne/colonne adéquate. Penser également à vérifier autant de cas de base que nécessaire (notamment si l'hypothèse de récurrence est utilisée sur plusieurs valeurs inférieures à $n+1$).

Exercice 4.17. Le cas $a = b$ correspond à l'Exercice 4.4. Pour le cas $a \neq b$, procéder par récurrence. Ici, l'idée est de faire apparaître des zéros via combinaisons linéaires de lignes/colonnes (observer par exemple les deux premières colonnes). Appliquer ensuite la loi des mineurs adéquatement. A nouveau, l'un des termes pourra être directement calculé grâce à l'hypothèse de récurrence, et le second nécessitera des calculs intermédiaires pour pouvoir conclure. Ici aussi, attention aux valeurs de n pour lesquelles le raisonnement est valable, et penser à traiter à part les cas non envisagés.

Exercice 4.18. $D = -(7+4i)\left(z - \left(-\frac{1}{13} + \frac{3i}{26}\right)\right)\left(z - \left(\frac{1}{5} + \frac{i}{10}\right)\right).$

Exercice 4.19. Le déterminant est nul si et seulement si $z = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 4.20.

(a) Linéairement dépendants.
(b) Linéairement dépendants.
(c) Linéairement dépendants.
(d) Linéairement indépendants.
(e) Linéairement dépendants.
(f) Linéairement indépendant.
(g) Linéairement indépendants.
(h) Linéairement dépendants.
(i) Linéairement dépendants.

Exercice 4.21. Les vecteurs sont linéairement dépendants.

Exercice 4.22. Les vecteurs sont linéairement indépendants pour tout $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$.

Exercice 4.23. Les vecteurs sont linéairement indépendants pour tout $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Exercice 4.24. Ils sont linéairement indépendants, donc a fortiori, u et w le sont aussi.

Exercice 4.25. Ils sont linéairement dépendants, donc a fortiori, u, v, w et t le sont aussi.

Exercice 4.26. Faux. Un contre-exemple est donné par

$$x_1 = x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_3 = x_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad x_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

qui respectent les conditions de l'énoncé et qui sont tels que x_1, x_3 et x_5 sont linéairement indépendants.

Exercice 4.27. On a

$$\mathrm{rg}(A) = 1, \quad \mathrm{rg}(B) = 2, \quad \mathrm{rg}(C) = 2, \quad \mathrm{rg}(D) = 3, \quad \mathrm{rg}(E) = 2 \quad \text{et} \quad \mathrm{rg}(F) = 4.$$

Exercice 4.28. $\mathrm{rg}(A) = \begin{cases} 4 & \text{si } \lambda \neq 3, \\ 2 & \text{si } \lambda = 3. \end{cases}$

Exercice 4.29.

Exercice 4.30. $\mathrm{rg}(A) = 3$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

Exercice 4.31. Le rang de la matrice vaut

$$\begin{cases} 3 & \text{si } a \neq \frac{1}{3} \text{ ou } c \neq -3, \\ 2 & \text{si } a = \frac{1}{3} \text{ et } c = -3. \end{cases}$$

5 Inverses de matrices

Exercice 5.5. La matrice est inversible si et seulement si $a_k \neq 0$. L'inverse est alors donné par

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{a_1}{a_k} & -\frac{a_2}{a_k} & \cdots & -\frac{a_{k-1}}{a_k} & \frac{1}{a_k} & -\frac{a_{k+1}}{a_k} & \cdots & -\frac{a_n}{a_k} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5.6. Vu les hypothèses, $\det(A^k) = 0$, donc $(\det A)^k = 0$, *i.e.* $\det A = 0$. Pour montrer que B est inversible et que son inverse est bien celui donné, il suffit de vérifier que

$$B\left(\sum_{\ell=0}^{k-1} A^\ell\right) = I.$$

Exercice 5.7. La matrice A est inversible pour tout $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Dans ce cas, on a

$$A^{-1} = \frac{1}{1-|\alpha|^2}\begin{pmatrix} 1 & -\overline{\alpha} & 0 \\ -\alpha & 1+|\alpha|^2 & -\overline{\alpha} \\ 0 & -\alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5.8. Le déterminant est donné par $(-1)^n \det(B + CAD)$.

Exercice 5.9. La matrice M est inversible si et seulement si la matrice S l'est. Dans ce cas,

$$M^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I & S^{-1} \\ -I & S^{-1} \end{pmatrix}.$$

La matrice N est inversible si et seulement si la matrice B l'est. Dans ce cas,

$$N^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ -B^{-1}A & B^{-1} & -B^{-1}C \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}.$$

Exercice 5.10. A est inversible pour tout $m \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$ et B est inversible pour tout $m \in \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$.

Exercice 5.11. $x = 1$ et $y = -3$.

Exercice 5.12. $x = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$.

Exercice 5.13. (a) $\det M = -2(\beta - 1)^2(\beta^2 + \beta + 1)$.

(b) M est inversible pour tout $\beta \in \mathbb{C} \setminus \left\{1, \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}\right\}$.

(c) $\mathrm{rg}(M) = 3$.

Exercice 5.14. La matrice M est inversible pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Quand M n'est pas inversible (*i.e.* $\lambda = 1$), les vecteurs

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad y = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

conviennent.

6 Espaces vectoriels (1)

Exercice 6.7. Il suffit de montrer que les huit propriétés d'un espace vectoriel sont satisfaites avec les opérations mentionnées. Celles-ci sont rappelées au début de la liste. Essentiellement, elles sont satisfaites par propriétés des opérations $+$ et $\cdot$ sur l'espace vectoriel E.

Exercice 6.8. Ce n'est pas un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Par exemple, la propriété (2.1) n'est pas satisfaite.

Exercice 6.9. Les polynômes sont linéairement dépendants.

Exercice 6.10. Si $m \in \mathbb{R}\backslash\{-2,1\}$, alors les fonctions sont linéairement indépendantes. Si $m \in \{-2,1\}$, alors elles sont dépendantes, et on a par exemple les relations linéaires suivantes :

- $\star$ $\underline{m = -2 :}$ $f + g + h = 0$,
- $\star$ $\underline{m = 1 :}$ $f + g - 2h = 0$.

Exercice 6.11. (a) Faux (contre-exemple : $f = \sin$ et $g = \cos$).

(b) Vrai (Steinitz).

(c) Faux (contre-exemple : $x = (1,0,0,0,0)^\sim$, $y = (0,1,0,0,0)^\sim$ et $z = (0,0,0,0,1)^\sim$).

(d) Vrai (preuve : il faut démontrer les deux implications ; en utilisant la définition d'indépendance linéaire, l'implication $\Rightarrow$ est assez directe ; pour $\Leftarrow$, il faut faire apparaître les coefficients adéquats pour utiliser l'hypothèse).

(e) Faux (preuve : si on a une relation linéaire pour $u_1, \ldots, u_k$, elle reste valable pour $u_1, \ldots, u_k, z$ avec 0 comme coefficient de z).

Exercice 6.12. (a) Les vecteurs sont linéairement dépendants.

(b) Découle directement du fait que les réels sont des nombres complexes.

(c) Les vecteurs sont linéairement indépendants.

(d) $\dim(E_{\mathbb{R}}) = 8$.

(e) $\dim(E_{\mathbb{C}}) = 4$.

Exercice 6.13. (a) Puisque $\dim(\mathbb{R}_{\leq 3}[X]) = 4$, il suffit de montrer que ces 4 polynômes forment une partie libre de $\mathbb{R}_{\leq 3}[X]$.

(b) Si $P \in \mathbb{R}_{\leq 3}[X]$ s'écrit $\alpha + \beta X + \gamma X^2 + \delta X^3$, ses composantes dans $\mathcal{B}$ sont données par

$$\Phi_{\mathcal{B}}(P) = \begin{pmatrix} \alpha + \beta a + \gamma a^2 + \delta a^3 \\ \beta + 2\gamma a + 3\delta a^2 \\ \gamma + 3\delta a \\ \delta \end{pmatrix}.$$

(c) La matrice de changement de base est donnée par

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & 2a & 3a^2 \\ 0 & 0 & 1 & 3a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6.14. (a) Puisque $\dim(E) = n$, il suffit de montrer que $y_1, \ldots, y_n$ forment une partie libre de E. Pour ce faire, partir de la définition d'indépendance linéaire et permuter les sommes intervenant dans l'expression pour utiliser le caractère libre des x_i et montrer que tous les coefficients sont nuls.

(b) La matrice de changement de base est donnée par

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6.15. Puisque $\dim(\mathbb{C}^3) = 3$, il suffit de montrer que u_1, u_2, u_3 forment une partie libre de $\mathbb{C}^3$. Dans cette base, les composantes du vecteur donné sont

$$\begin{pmatrix} i \\ 2 \\ -\frac{i}{2} \end{pmatrix}.$$

Exercice 6.16. (a) Puisque $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$, il suffit de montrer que u_1, u_2, u_3, u_4 forment une partie libre de $\mathbb{R}^4$.

(b) La matrice de changement de base est donnée par

$$\mathcal{M}_{W \to U} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(c) Les composantes dans les bases W et U sont données respectivement par

$$\Phi_W(3w_1 + w_2 - w_4) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Phi_U(3w_1 + w_2 - w_4) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

7 Espaces vectoriels (2)

Exercice 7.5. (a) Pour montrer que ce sont des sous-espaces vectoriels, il suffit de vérifier, pour chacun, que le vecteur nul leur appartient, et que la somme et la multiplication scalaire sont internes.
Une base de F est donnée par

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\right), \quad \text{d'où } \dim F = 2.$$

Une base de G est donnée par

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}\right), \quad \text{d'où } \dim G = 2.$$

Une base de H est donnée par

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\right), \quad \text{d'où } \dim H = 2.$$

(b) L'intersection de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel. On a

$$F \cap G = F \cap H = G \cap H = \{X \in \mathbb{R}_2^2 \mid AX = 0 = XA\}.$$

Une base de ce sous-espace est donnée par

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ -2 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}\right),$$

et on a donc un espace de dimension 1.

Exercice 7.6. Pour montrer que ce sont des sous-espaces vectoriels, il suffit de vérifier, pour chacun, que la matrice nulle leur appartient, et que la somme et la multiplication scalaire sont internes.
Pour montrer l'égalité avec la somme directe, il faut d'abord montrer que $S_n \cap A_n = \{0\}$, puis que la somme rend l'espace $\mathbb{C}_n^n$ tout entier. Pour ce dernier point, raisonner en termes de dimension, ou montrer que toute matrice de $\mathbb{C}_n^n$ peut s'écrire comme la somme d'une matrice de S_n et d'une matrice de A_n (en procédant par analyse-synthèse).

Exercice 7.7. Montrer que $G \subseteq F$ (il suffit de montrer que les vecteurs qui engendrent G appartiennent à F), puis conclure en montrant que $\dim F = \dim G$. Attention que F et G sons les sous-espaces **engendrés** par A et B, ces deux derniers ensembles n'étant pas eux-mêmes des sous-espaces vectoriels.

Exercice 7.8. Pour montrer que ce sont des sous-espaces vectoriels, il suffit de vérifier, pour chacun, que la fonction nulle leur appartient, et que la somme et la multiplication scalaire sont internes.
Pour montrer l'égalité avec la somme directe, il faut d'abord montrer que $P \cap I = \{0\}$, puis que la somme rend l'espace E tout entier. Pour ce dernier point, montrer que toute fonction de E peut s'écrire comme la somme d'une fonction de P et d'une fonction de I (en procédant par analyse-synthèse).

Exercice 7.9. (a) Une base de F est donnée par

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

(b) Une base de H est donnée par

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right).$$

(c) Une base de $F \cap G$ est donnée par

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

(d) Les deux sous-espaces sont bien en somme directe, et on a $F \oplus H = \mathbb{C}_3^2$.

(e) Comme $F \cap G \subseteq F$, les sous-espaces $F \cap G$ et H sont en somme directe. Par contre, l'égalité n'est pas satisfaite.

Exercice 7.10. (a) Pour montrer que F est un sous-espace vectoriel, il suffit de vérifier que le polynôme nul lui appartient, et que la somme et la multiplication scalaire sont internes.

(b) Une base de F est donnée par

$$(z^4 + 1, z^3 + z, z^2).$$

Dans cette base, on a

$$2z^4 - z^3 - z + 2 = 2 \cdot (z^4 + 1) - 1 \cdot (z^3 + z) + 0 \cdot z^2.$$

(c) On a $F \cap G = \rangle z^4 + 1 \langle$. On en tire que $\dim(F + G) = 5$.

(d) Par exemple, $(z, 1)$.

Exercice 7.11. Tout d'abord, montrer que G et $H_g := \rangle e_1 + g, \ldots, e_k + g \langle$ sont en somme directe. Pour ce faire, prendre $x \in G \cap H_g$. Utiliser le fait que $x \in H_g$ pour l'écrire en fonction de $e_1, \ldots, e_k, g$, puis le fait que $x \in G$ pour conclure que $x = 0$ (en utilisant le fait que F et G sont en somme directe).
Pour montrer que $E = G \oplus H_g$, montrer que tout $x \in E$ peut s'écrire comme la somme d'un élément de G et d'un élément de H_g. Pour ce faire, partir du fait que $E = F \oplus G$, et travailler l'expression de x pour faire apparaître les éléments souhaités (des artifices de calculs de la forme $+\lambda g - \lambda g$ peuvent être utiles).

Exercice 7.12. (a) Pour $\Rightarrow$, comme $\mathcal{B}'$ contient autant d'éléments que la dimension de l'espace, il suffit de montrer que c'est une partie libre de E.
Pour $\Leftarrow$, comme $\mathcal{B}$ contient autant d'éléments que la dimension de l'espace, il suffit de montrer que c'est une partie génératrice de E (plus rapide ici).

(b) La matrice de changement de base est donnée par

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

8 Systèmes linéaires

Exercice 8.4. Les ensembles de solutions sont

(a) $S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{7}{6} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$,

(b) $S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -9+7t \\ 0 \\ -3+4t \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{C} \right\}$.

Exercice 8.5. (a) L'ensemble des solution est donné par

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{a-bc}{a(b-1)} \\ \frac{a-c}{a(b-1)} \\ \frac{(a+1)(bc-a)}{a(b-1)} \end{pmatrix} \right\}, \qquad \text{si } a \notin \{0,1\} \text{ et } b \neq 1,$$

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} by-1 \\ y \\ 1-by \end{pmatrix} : y \in \mathbb{C} \right\}, \qquad \text{si } a = c = 0,$$

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{(b-1)z+1-bc}{1-b} \\ \frac{c-1}{1-b} \\ z \end{pmatrix} : z \in \mathbb{C} \right\}, \qquad \text{si } a = 1 \text{ et } b \neq 1,$$

$$S_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 1-y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} : y, z \in \mathbb{C} \right\}, \qquad \text{si } a = b = c = 1,$$

$$S_5 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x+1 \\ -(1+a)x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{C} \right\}, \qquad \text{si } b = 1 \text{ et } c = a \neq 1,$$

$$S_6 = \emptyset, \qquad \text{sinon.}$$

(b) L'ensemble des solution est donné par

$$S_1 = \emptyset, \qquad \text{si } a = b = c \neq \pm 1,$$

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ c-x-y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{C} \right\}, \qquad \text{si } a = b = c = \pm 1,$$

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{(b-c)z+1-bc}{a-b} \\ \frac{(c-a)z-1+ac}{a-b} \\ z \end{pmatrix} : z \in \mathbb{C} \right\}, \qquad \text{si } a \neq b,$$

$$S_4 = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{(c-b)y+1-c^2}{a-c} \\ y \\ \frac{(b-a)y-1+ac}{a-c} \end{pmatrix} : y \in \mathbb{C} \right\}, \qquad \text{si } a \neq c,$$

$$S_5 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ \frac{(c-a)x+1-c^2}{b-c} \\ \frac{(a-b)x-1+bc}{b-c} \end{pmatrix} : x \in \mathbb{C} \right\}, \qquad \text{si } b \neq c.$$

(c) L'ensemble des solution est donné par

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ c-x-y-z \end{pmatrix} : x,y,z \in \mathbb{C} \right\}, \qquad \text{si } a=b \text{ et } ac=1,$$

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{(b^2-b)z+(ab-a)t+1-b}{a-b} \\ \frac{(b-a)z-1+ac}{a-b} \\ z \\ t \end{pmatrix} : z,t \in \mathbb{C} \right\}, \qquad \text{si } a \neq b \text{ et } (a+b)c=2,$$

$$S_3 = \emptyset, \qquad \text{sinon.}$$

(d) L'ensemble des solution est donné par

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a+b \\ \frac{a(d-a)}{c-d} \\ \frac{a(a-c)}{c-d} \end{pmatrix} \right\}, \qquad \text{si } a \neq b \text{ et } c \neq d,$$

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ a-x-y \end{pmatrix} : x,y \in \mathbb{C} \right\}, \qquad \text{si } a=b=c=d,$$

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} b \\ y \\ -y \end{pmatrix} : y \in \mathbb{C} \right\}, \qquad \text{si } a=0 \neq b,$$

$$S_4 = \left\{ \begin{pmatrix} a+b \\ -z-a \\ z \end{pmatrix} : z \in \mathbb{C} \right\}, \qquad \text{si } a=c \neq b,$$

$$S_5 = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{(d-c)z+a(c-a)}{c-a} \\ \frac{(a-d)z}{c-a} \\ z \end{pmatrix} : z \in \mathbb{C} \right\}, \qquad \text{si } a=b \neq c,$$

$$S_6 = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{(c-d)y+a(d-a)}{d-a} \\ y \\ \frac{(a-c)y}{d-a} \end{pmatrix} : y \in \mathbb{C} \right\}, \qquad \text{si } a=b \neq d,$$

$$S_7 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ \frac{(a-d)(x-a)}{d-c} \\ \frac{(c-a)(x-a)}{d-c} \end{pmatrix} : x \in \mathbb{C} \right\}, \qquad \text{si } a=b \text{ et } c \neq d,$$

$$S_8 = \emptyset, \qquad \text{sinon.}$$

(e) L'ensemble des solution est donné par

$$S_1 = \mathbb{R}^3 \qquad \text{si } a=b=c=d=0,$$

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1-x-y \end{pmatrix} : x,y \in \mathbb{C} \right\}, \qquad \text{si } a=b=c=d \neq 0,$$

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ y+1 \end{pmatrix} : y \in \mathbb{C} \right\}, \qquad \text{si } a \neq b \text{ et } a=-b=c=-d,$$

$$S_4 = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{a-c}{a-b} \\ \frac{a(c-a)}{a^2-b^2} \\ \frac{ac-b^2}{a^2-b^2} \end{pmatrix} \right\}, \quad \text{si } a \neq b \text{ et } a \neq -b \text{ et } d = -a+b+c,$$

$$S_5 = \emptyset, \quad \text{sinon.}$$

(f) L'ensemble des solution est donné par

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ c-x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{C} \right\}, \quad \text{si } a = b = 0,$$

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -b \\ y \\ -b \end{pmatrix} : y \in \mathbb{C} \right\}, \quad \text{si } b = -\tfrac{c}{2} \neq 0 \text{ et } a = 0,$$

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{c}{2} \\ \frac{2a^2+2b^2+bc}{2a} \\ \frac{c}{2} \end{pmatrix} \right\}, \quad \text{si } a \neq 0,$$

$$S_4 = \emptyset, \quad \text{sinon.}$$

Exercice 8.6. (a) Le système est compatible pour tout $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(b) Pour $\lambda = 16$, l'ensemble des solutions est donné par

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 3 - x_1 \\ 4 - x_1 \\ -\frac{5}{16} \end{pmatrix} : x_1 \in \mathbb{C} \right\}.$$

L'ensemble des solutions du système homogène associé est de dimension 1.

Exercice 8.7. (a) $\det M = (\beta - 3)^2$.

(b) $\operatorname{rg}(M) = \begin{cases} 4 & \text{si } \beta \neq 3, \\ 2 & \text{si } \beta = 3 \end{cases}.$

(c) Le système est compatible si et seulement si $\beta \neq 3$.

Exercice 8.8. Faux (contre-exemple : $a = 2$ et $b = c = 1$).

Exercice 8.9. (a) Le système est compatible pour tout $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(b) Pour $\lambda = -1$, l'ensemble des solutions est donné par

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 - z \\ z + \frac{1}{4} \\ z \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 8.10. (a) $\operatorname{rg}(A) = \begin{cases} 3 & \text{si } \beta \neq -1, \\ 2 & \text{si } \beta = -1. \end{cases}$

(b) Le système est compatible pour tout $\beta \in \mathbb{C}$.

(c) Le système admet une solution unique pour tout $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$.