

Calcul matriciel

Bloc 1 – Sciences Mathématiques & Physiques

Titulaire : Michel Rigo
m.rigo@uliege.be

Assistant.e.s : Antoine Renard ; Safia Bennabi
antoine.renard@uliege.be ; s.bennabi@uliege.be

1 Signe sommatoire et symbole de Kronecker

Exercices au tableau

Exercice 1.1. Développer explicitement et calculer les expressions suivantes :

$$(a) \sum_{i=1}^3 i^2$$

$$(d) \sum_{0 \leq i \leq j \leq 4} (j - i)$$

$$(b) \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 ij$$

$$(e) \sum_{\heartsuit \in \{2,3,5,7\}} (\heartsuit + 1)$$

$$(c) \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^i ij$$

$$(f) \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^{10} \delta_{i,j}$$

Exercice 1.2. Montrer les égalités suivantes :

$$(a) \sum_{i=1}^n ax_i = a \sum_{i=1}^n x_i$$

$$(b) \sum_{i=1}^n 1 = n$$

Exercice 1.3. Montrer que

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{i,j} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n x_{i,j}.$$

Exercice 1.4. Démontrer la formule

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exercice 1.5. Exprimer en fonction de n les sommes suivantes :

$$(a) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$$

$$(b) \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j \frac{1}{n-k+1}.$$

Exercice 1.6. Calculer la somme

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j (j - k) \delta_{j,k+1}.$$

Exercices en autonomie

Exercice 1.7. Montrer les égalités suivantes :

$$(a) \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n y_i$$

$$(b) \sum_{i=1}^n a = na$$

Exercice 1.8. Démontrer la formule

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Utiliser cette formule, ainsi que l'Exercice 1.4, pour en déduire la valeur de la somme

$$\sum_{i=0}^m (m-i)(n-i).$$

Exercice 1.9. Exprimer en fonction de x et de n la somme

$$\sum_{k=0}^n x^k.$$

Exercice 1.10. Calculer les sommes suivantes :

$$(a) \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j \delta_{j,k}$$

$$(b) \sum_{k=1}^n kq^{k-1}$$

Exercice 1.11 (Admission Ingénieurs 2000). Démontrer la formule

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

Exercice 1.12 (Identité de Lagrange). Démontrer que

$$\sum_{1 \leq k < j \leq n} (a_j b_k - a_k b_j)^2 = \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right) - \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2.$$

2 Matrices

Exercices au tableau

Exercice 2.1. On considère les matrices A, B, C décrites ci-dessous.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2+i & -i \\ -5 & 3i & 4+3i \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1-i & i \\ 2 & 0 \\ i & 4+i \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3i & -4i \end{pmatrix}$$

Effectuer, si possible, les opérations suivantes et simplifier au maximum le résultat obtenu. Lorsqu'une opération n'est pas définie, expliquer pourquoi.

- (a) $A + B$ (b) $A + \tilde{B}$ (c) AB (d) A^2 (e) C^2

Exercice 2.2. Déterminer les matrices qui commutent avec la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.3. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier la réponse donnée dans chaque cas.

- (a) Il existe deux matrices $A, B \in \mathbb{C}_2^2$ telles que $AB = \mathbf{0}$ et $BA \neq \mathbf{0}$, où $\mathbf{0}$ est la matrice nulle de $\mathbb{C}_2^2$.
- (b) Pour toutes matrices $A, B \in \mathbb{C}_n^n$, on a $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.
- (c) Si deux matrices commutent, alors elles sont nécessairement carrées et de même dimension.
- (d) Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, il existe deux matrices distinctes $A, B \in \mathbb{C}_n^n$, autres que les matrices identité et nulle, telles que $(AB)^\sim = AB$.
- (e) Une matrice est hermitienne si et seulement si ses éléments diagonaux sont réels.

Exercice 2.4. Soit $a \in \mathbb{C}$. Déterminer la forme générale des matrices de $\mathbb{C}_4^4$ qui commutent avec

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.5. Soit $a \in \mathbb{C}$. Calculer les différentes puissances de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.6. Soient les matrices $A = (\delta_{n-i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B = (\delta_{i+1,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. Calculer AB .

Exercice 2.7. Soit la matrice $A \in \mathbb{C}_n^n$ définie par $A = (\delta_{n-i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. Calculer les puissances successives de A .

Exercices en autonomie

Exercice 2.8. Déterminer les valeurs des paramètres réels α et β pour lesquels les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 2 \end{pmatrix}$$

commutent.

Exercice 2.9 (Interro formative – 16 Novembre 2022). Résoudre

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & z^2 \\ z & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Exercice 2.10. Trouver les vecteurs $x \in \mathbb{R}^3$ tels que $Ax = b$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.11. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$. On définit les ensembles

$$F = \{Y \in \mathbb{R}_2^2 : AY = 0\}, \quad G = \{Y \in \mathbb{R}_2^2 : YA = 0\}, \quad H = \{Y \in \mathbb{R}_2^2 : AY = YA\}.$$

Déterminer les ensembles F , G et H , puis les comparer en termes d'inclusion. Que peut-on dire des ensembles $F \cap G$, $F \cap H$ et $G \cap H$?

Exercice 2.12. Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, on a

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.13. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ avec } M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.14. Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_2^2.$$

Calculer les puissances successives de la matrice A .

Exercice 2.15. Pour tout nombre réel θ , on pose

$$M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Montrer que, pour tout entier naturel n et pour tout réel θ , on a $(M(\theta))^n = M(n\theta)$.

Exercice 2.16. Soient les matrices $A = (\delta_{n-i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B = (\delta_{i+1,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. Calculer BA .

Exercice 2.17. Soit la matrice $A \in \mathbb{C}_n^n$ définie par $A = (\frac{1}{n})_{1 \leq i,j \leq n}$. Calculer A^2 .

Exercice 2.18. Soit la matrice $A \in \mathbb{C}_n^n$ définie par $A = (\delta_{i+1,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

(a) Calculer les puissances successives de A .

(b) On définit l'indice de nilpotence d'une matrice $M \in \mathbb{C}_n^n$ comme étant le plus petit naturel m tel que $M^m = 0$. Déterminer l'indice de nilpotence de la matrice A .

Exercice 2.19. Déterminer la forme générale des matrices qui commutent avec la matrice $A \in \mathbb{C}_n^n$ définie par $A = (\delta_{n+1-i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

Exercice 2.20. Soit $A \in \mathbb{C}_n^n$. Notons 0 la matrice nulle de $\mathbb{C}_n^n$. Calculer les puissances successives de la matrice

$$B = \begin{pmatrix} A & 0 & A & 0 \\ 0 & A & 0 & A \\ 0 & 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.21. Considérons les matrices de $\mathbb{C}_n^n$ suivantes

$$M = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_0 & a_1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-2} & b_{n-1} \\ 0 & b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_0 & b_1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_0 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que M et N commutent.

3 Permutations

Exercices au tableau

Exercice 3.1. Considérons la permutation

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 4 & 7 & 2 & 6 & 1 & 8 & 9 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

- (a) Décomposer μ en un produit de cycles disjoints.
- (b) Décomposer μ en un produit de transpositions (cycles de longueur 2).
- (c) En déduire la signature de la permutation (et sa parité).

Exercice 3.2. Soient les permutations $\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $\nu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

- (a) Calculer $\mu\nu$, $\nu\mu$, $\mu\mu$ et $\nu\nu$. Les permutations μ et ν commutent-elles ?
- (b) Quels sont les éléments appartenant à $\{\mu^n | n \in \mathbb{N}\}$ et $\{\nu^n | n \in \mathbb{N}\}$ respectivement ?
- (c) Quel est l'inverse de μ ?
- (d) Décomposer μ et ν en un produit de cycles disjoints.
- (e) Décomposer μ en un produit de transpositions.
- (f) Quelle est la signature de μ , de ν et de $\mu\nu$?

Exercice 3.3. Soit $n \geq 3$. Toute permutation de $\mathcal{S}_n$ est un produit de cycles de longueur 3, vrai ou faux ? Justifier.

Exercices en autonomie

Exercice 3.4. Considérons la permutation

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 9 & 1 & 3 & 2 & 11 & 12 & 10 & 4 & 13 & 8 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

- (a) Décomposer μ en un produit de cycles disjoints.
- (b) Calculer la signature de μ et en déduire sa parité.

Exercice 3.5. Soient les permutations

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \nu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 6 & 9 & 7 & 2 & 5 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

- (a) Décomposer μ et ν en un produit de cycles disjoints.
- (b) Décomposer μ et ν en un produit de transpositions.
- (c) En déduire la signature de μ et de ν .
- (d) Donner les permutations μ^{100} et ν^{100} .

Exercice 3.6 (Examen Janvier 2023). Pour les quatre permutations suivantes, déterminer leur signature en explicitant et justifiant votre raisonnement.

$$\nu_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \nu_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \nu_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 1 & 6 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix},$$

et ν_4 est une permutation de $\{1, \dots, n\}$ définie par

$$\nu_4 : i \mapsto \begin{cases} i & \text{si } i \notin \{k, n-k\}, \\ n-i & \text{sinon,} \end{cases}$$

avec n, k fixés tels que $n \geq 4$ et $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$.

Exercice 3.7. Soit $n \in \mathbb{N}_0$. Déterminer la signature de la permutation

$$\sigma_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3.8. Soient $n \in \mathbb{N}$ et τ une transposition de $\mathcal{S}_n$. Montrer que $f : \mathcal{S}_n \rightarrow \mathcal{S}_n : \mu \mapsto \tau\mu$ et $g : \mathcal{S}_n \rightarrow \mathcal{S}_n : \mu \mapsto \mu\tau$ sont des bijections de $\mathcal{S}_n$ dans lui-même.

Exercice 3.9. Soient $n, k \in \mathbb{N}$ tels que $n \geq 2$ et $2 \leq k \leq n$. Combien y a-t-il de cycles de longueur k dans le groupe $\mathcal{S}_n$?

4 Déterminants, indépendance linéaire et rang d'une matrice

Exercices au tableau

Exercice 4.1. Calculer le déterminant des matrices suivantes :

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(c) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$(b) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(d) \begin{pmatrix} 10 & 0 & -5 & 15 \\ -2 & 7 & 3 & 0 \\ 8 & 14 & 0 & 2 \\ 0 & -21 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4.2. Calculer et factoriser les déterminants

$$D = \begin{vmatrix} a & 3b & 0 & 0 \\ b & a & 2b & 0 \\ 0 & 2b & a & b \\ 0 & 0 & 3b & a \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad E = \begin{vmatrix} x & -y & -x & y \\ y & x & -y & x \\ z & -u & z & -u \\ u & z & u & z \end{vmatrix}.$$

Exercice 4.3. Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_1 & \dots & a_1 & a_1 \end{vmatrix},$$

où $a_1, \dots, a_n$ sont des paramètres réels ($n \in \mathbb{N}_0$).

Exercice 4.4. Soit $n \in \mathbb{N}_0$. Calculer le déterminant $D_n(x, y)$ de la matrice

$$M_n(x, y) = \begin{pmatrix} x & y & \cdots & y \\ y & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & y \\ y & \cdots & y & x \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_n^n.$$

Exercice 4.5. Les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^2$ sont-ils linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$?

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 4.6. Déterminer si les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants sont linéairement dépendants ou indépendants.

$$(a) \quad u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix},$$

$$(b) \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$(c) \quad w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.7. Montrer que les vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ i \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3i \\ -14 \\ 7i \end{pmatrix}$$

sont linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$ et linéairement dépendants sur $\mathbb{C}$.

Exercice 4.8. Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ 2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} m \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Pour quelle(s) valeur(s) de m ces vecteurs sont-ils linéairement indépendants ?

Exercice 4.9. Soient $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^3$ trois vecteurs linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$. Posons

$$v_1 = a_1 + a_2 + a_3,$$

$$v_2 = a_1 - a_2 + a_3,$$

$$v_3 = a_1 + a_2 - a_3.$$

Les vecteurs $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ sont-ils linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$?

Exercice 4.10. Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -5 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.11. Discuter, en fonction du paramètre complexe m , le rang de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ m & 1 & -1 & -1 \\ 1 & m & 1 & 0 \\ 1 & -1 & m & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.12. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Calculer le rang de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & \alpha & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.13. Considérons la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & b \\ a & c & d \end{pmatrix}.$$

Discuter la valeur du rang de la matrice M en fonction des paramètres réels a, b, c et d .

Exercices en autonomie

Exercice 4.14. Calculer les déterminants suivants, où $m \in \mathbb{N}$, $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$a = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}, \quad b = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad c = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}, \quad d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix}$$

Exercice 4.15. Calculer le déterminant des matrices suivantes, où $a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} a & a & b & 0 \\ a & a & 0 & b \\ c & 0 & a & a \\ 0 & c & a & a \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.16. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}_0$,

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & -2 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & n-1 \\ 0 & \cdots & 0 & -(n-1) & 1 \end{vmatrix} = n!.$$

Exercice 4.17. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}_0$,

$$E_n(\lambda, a, b) = \begin{vmatrix} \lambda & a & \cdots & a \\ b & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \cdots & b & \lambda \end{vmatrix} = \begin{cases} \frac{a(\lambda-b)^n - b(\lambda-a)^n}{a-b} & \text{si } a \neq b, \\ (\lambda-a)^{n-1}(\lambda + (n-1)a) & \text{si } a = b. \end{cases}$$

Exercice 4.18. Soit $z \in \mathbb{C}$. Calculer et factoriser le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} -7iz^2 - z & 2 & 1 \\ 1 & i & 0 \\ 4z^2 - z & -7/4 & -1 \end{vmatrix}.$$

Exercice 4.19 (Interro formative - 16 Novembre 2022). A quelle(s) condition(s) sur $z \in \mathbb{C}$ la matrice suivante possède-t-elle un déterminant nul ?

$$\begin{pmatrix} 1 & z+2 & -1 & z+1 \\ 1 & 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.20. Les vecteurs suivants sont linéairement dépendants ou indépendants sur $\mathbb{R}$?

- (a) $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix},$ (e) $z_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, z_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}, z_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix},$
- (b) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix},$ (f) $r = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$
- (c) $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 36 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix},$ (g) $s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, s_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, s_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$
- (d) $y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, y_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},$ (h) $t_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, t_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, t_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$
- (i) $x_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}, x_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Exercice 4.21. Les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants sont-ils linéairement indépendants ?

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}, t = \begin{pmatrix} 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.22. Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre réel a les vecteurs suivants sont-ils linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$?

$$u = \begin{pmatrix} a \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} -1 \\ a \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ a \\ -1 \end{pmatrix}, t = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ a \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.23. Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre réel m les vecteurs suivants sont-ils linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$?

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} m \\ m-1 \\ m \\ m \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} m \\ 2m-1 \\ m \\ 3m-1 \end{pmatrix}, t = \begin{pmatrix} m^2-m \\ m^2-m \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.24. Les vecteurs suivants sont-ils linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$?

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Qu'en est-il des vecteurs suivants ?

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.25. Les vecteurs suivants sont-ils linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$?

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Qu'en est-il des vecteurs suivants ?

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}, t = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.26 (Examen Janvier 2024). On donne $x_1, \dots, x_5 \in \mathbb{R}^8$ tels que x_1, x_2 sont linéairement dépendants et x_3, x_4, x_5 aussi. On ne peut jamais trouver 3 vecteurs linéairement indépendants parmi $x_1, \dots, x_5$. Vrai ou faux ? Justifier.

Exercice 4.27. Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 12 & 8 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -2 & 3 & -13 \\ 3 & -3 & 15 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 8 \\ 7 & 1 & 5 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 7 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.28. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Calculer le rang de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & 2 \\ 3 & \lambda & 2 & 2 \\ \lambda & 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.29. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Discuter la valeur du rang des matrices suivantes en fonction des paramètres réels donnés :

$$A = \begin{pmatrix} a & -a & 0 \\ a & b & -2a \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ a & a & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} a & b & b & a \\ b & a & a & b \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.30 (Examen Septembre 2023). Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & \lambda & 1 \\ \lambda & 3 & 1 & 2 & -\lambda & \lambda \\ 0 & 2 & 3 & -1 & \lambda & 0 \end{pmatrix}.$$

Que vaut le rang de A en fonction du paramètre $\lambda \in \mathbb{C}$?

Exercice 4.31 (Examen Janvier 2024). Déterminer le rang de la matrice suivante en fonction des paramètres $a, c \in \mathbb{C}$,

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 & -7 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & a & -2 & c \end{pmatrix}.$$

5 Inverses de matrices

Exercices au tableau

Exercice 5.1. Si possible, inverser la matrice

$$M = \begin{pmatrix} i & -i & 1+i \\ i & i & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5.2. Soient A, B, C, D des matrices avec A et D carrées et inversibles. Démontrer que les matrices

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$

sont inversibles et calculer leur inverse.

Exercice 5.3. Si possible, calculer l'inverse de

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5.4. En utilisant les formules de Frobenius-Schur, calculer

$$D = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & b \\ -b & 0 & 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & -b & 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & -b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}.$$

Exercices en autonomie

Exercice 5.5. Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. Considérons la matrice complexe

$$M = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & & \vdots \\ & & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_1 & \cdots & a_{k-1} & a_k & \cdots & \cdots & a_n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & & \\ \vdots & & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & & & 1 \end{pmatrix}.$$

À quelles conditions la matrice M est-elle inversible ? Que vaut alors son inverse ?

Suggestion : Utiliser l'Exercice 5.2 avec un découpage en blocs adéquat.

Exercice 5.6 (Partiel Janvier 2006). Soit A une matrice de $\mathbb{C}_n^n$ pour laquelle il existe un entier $k \geq 2$ tel que

$$A^k = 0 \quad \text{et} \quad A^{k-1} \neq 0.$$

Posons $B = I - A$ où $I \in \mathbb{C}_n^n$ est la matrice identité de dimension n . Démontrer que A n'est pas inversible. Puis, démontrer que B est inversible et que $B^{-1} = \sum_{\ell=0}^{k-1} A^\ell$.

Exercice 5.7 (Partiel Janvier 2009). Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On considère la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha}^2 \\ \alpha & 1 & \bar{\alpha} \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les valeurs du paramètre α pour lesquelles la matrice M est inversible et, dans ce cas, donner son inverse.

Exercice 5.8. Si A, B, C, D sont des matrices de $\mathbb{C}_n^n$ et si I est la matrice identité de $\mathbb{C}_n^n$, calculer

$$\begin{vmatrix} 0 & I & D \\ I & A & 0 \\ C & 0 & B \end{vmatrix}.$$

Exercice 5.9. Soient A, B, C, S des matrices de $\mathbb{C}_n^n$, et notons I la matrice identité de $\mathbb{C}_n^n$. Considérons les matrices

$$M = \begin{pmatrix} I & -I \\ S & S \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ A & B & C \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}.$$

À quelles conditions les matrices M et N sont-elles inversibles? Dans ces conditions, calculer leurs inverses.

Exercice 5.10. Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre réel m les matrices suivantes sont-elles inversibles?

$$A = \begin{pmatrix} m & 4 \\ 2 & 2m \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & 2 & m-1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5.11 (Examen Septembre 2023). Résoudre

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 36 \\ 27 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 5.12 (Examen Juin 2019). Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{C}$ a-t-on

$$(1 \quad 2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x & 1 & x \\ 1 & x & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0?$$

Exercice 5.13 (Examen Juin 2021). Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \beta^3 \\ \beta & \beta & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & \beta^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Calculer le déterminant de M .
- (b) Déterminer quand cette matrice est inversible en fonction du paramètre complexe β .
- (c) Quand la matrice n'est pas inversible, quel est son rang?

Exercice 5.14 (Examen Août 2024). Pour quelles valeurs de λ la matrice suivante est-elle inversible?

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Lorsque la matrice n'est pas inversible, donner un vecteur colonne $x \neq 0$ et un vecteur ligne $y \neq 0$ tels que $Mx = 0$ et $yM = 0$.

6 Espaces vectoriels (1)

Rappels

Définition 6.1 (VII.1.1, p. 121, version 2009-2010). Soit $\mathbb{K}$ un champ dont le neutre pour l'addition est 0 et le neutre pour la multiplication est 1. Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés *scalaires*. Un *espace vectoriel* sur $\mathbb{K}$ ou *$\mathbb{K}$ -vectoriel* est un ensemble E muni d'une opération binaire interne

$$+ : E \times E \rightarrow E$$

et d'une opération interne

$$\cdot : \mathbb{K} \times E \rightarrow E$$

qui jouissent des propriétés suivantes :

- (1) $(E, +)$ est un groupe commutatif,
- (2) pour tous $x, y \in E$ et tous scalaires $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:
 - (2.1) $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$, *i.e.* l'opération $\cdot$ est associative par rapport aux scalaires,
 - (2.2) $1 \cdot x = x$, *i.e.* il existe un neutre pour l'opération $\cdot$,
 - (2.3) $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$, *i.e.* l'opération $\cdot$ est distributive par rapport aux scalaires,
 - (2.4) $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$, *i.e.* l'opération $\cdot$ est distributive par rapport aux vecteurs.

Exercices au tableau

Exercice 6.1. Déterminer si les polynômes

$$P(X) = X^3 - 3X^2 + 3X + 1, \quad Q(X) = X^3 - X^2 + 8X + 2 \quad \text{et} \quad R(X) = 2X^3 - 4X^2 + 9X + 5$$

sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 6.2. On considère $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ comme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

- (a) À quelle(s) condition(s) sur $z \in \mathbb{C}$ les éléments 1 et z sont-ils linéairement dépendants sur $\mathbb{R}$?
- (b) À quelle(s) condition(s) sur $z \in \mathbb{C}_0$ les éléments $\frac{1}{z}$ et 1 sont-ils linéairement dépendants sur $\mathbb{R}$?
- (c) Démontrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, les éléments 1, z et z^2 sont toujours linéairement dépendants sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6.3. Dans l'espace vectoriel des fonctions continues réelles $C^0(\mathbb{R})$, étudier l'indépendance linéaire des fonctions

$$f : x \mapsto 1, \quad g : x \mapsto \sin(x) \quad \text{et} \quad h : x \mapsto \cos(x).$$

Exercice 6.4. Considérons le $\mathbb{C}$ -vectoriel $E_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^3$.

- (a) Montrer que $\mathbb{C}^3$ peut aussi être considéré comme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
- (b) Considérons le $\mathbb{R}$ -vectoriel $E_{\mathbb{R}} = \mathbb{C}^3$. Donner un exemple de vecteurs qui sont linéairement indépendants dans $E_{\mathbb{C}}$, mais linéairement dépendants dans $E_{\mathbb{R}}$.
- (c) Quelles sont les dimensions des espaces $E_{\mathbb{C}}$ et $E_{\mathbb{R}}$? En déduire la dimension de $\mathbb{C}^n$ ($n \in \mathbb{N}_0$) lorsqu'il est vu comme $\mathbb{C}$ -vectoriel, puis comme $\mathbb{R}$ -vectoriel.

Exercice 6.5. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base d'un espace vectoriel E sur le champ $\mathbb{K}$. On donne les vecteurs

$$f_1 = e_1 + e_2 + e_3, \quad f_2 = -e_1 + e_2 + 2e_3, \quad f_3 = e_3 - 2e_4 \quad \text{et} \quad f_4 = e_1 - e_2 - e_3.$$

- (a) Démontrer que $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ est une base de E .
- (b) Exprimer la formule de changement de base permettant de passer de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ et la formule de changement de base permettant de passer de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$.

Exercice 6.6. Considérons $\mathbb{R}_{\leq 2}[X]$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 à coefficients dans $\mathbb{R}$. Définissons les polynômes

$$P_1(X) = X, \quad P_2(X) = 2X + 1 \quad \text{et} \quad P_3(X) = X^2 + 2X + 2.$$

- (a) Démontrer que les polynômes P_1, P_2, P_3 forment une base de $\mathbb{R}_{\leq 2}[X]$.
- (b) Déterminer les composantes des polynômes Q_1, Q_2, Q_3 dans cette base si

$$Q_1(X) = 1, \quad Q_2(X) = X \quad \text{et} \quad Q_3(X) = X^2.$$

- (c) Écrire en général les formules de changement de base établissant le lien entre les composantes des polynômes de $\mathbb{R}_{\leq 2}[X]$ dans ces deux bases.

Exercices en autonomie

Exercice 6.7. On considère un espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ sur un corps $\mathbb{K}$ et un vecteur $a \in E$. Démontrer que les opérations

$$\oplus : E \times E \rightarrow E : (x, y) \mapsto x \oplus y = x + y - a$$

et

$$\odot : \mathbb{K} \times E \rightarrow E : (\lambda, x) \mapsto \lambda \odot x = \lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot a$$

définissent sur E une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Exercice 6.8. On définit sur $\mathbb{R}^2$ des lois $\oplus$ et $\odot$ comme suit

$$\oplus : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right) \mapsto \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$$

et

$$\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \left(\lambda, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \mapsto \begin{pmatrix} \lambda x - \lambda^2 xy \\ \lambda y \end{pmatrix}.$$

Déterminer si l'ensemble $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6.9. Vrai-Faux. Justifier à chaque fois votre réponse par une preuve (énoncer un résultat théorique peut suffire) ou un contre-exemple explicite.

- (a) (Examen Septembre 2023) Si f, g appartiennent à l'espace vectoriel $C^0(\mathbb{R})$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, alors $f, g, f \cdot g$ sont linéairement dépendants.
- (b) (Examen Juin 2023) Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[x]$ des polynômes à coefficients réels, $\pi x^2 + 1$, $x^2 + \sqrt{11}x - 3$, $x^2 - 2023x + 24$ et $x^2 + \sin\left(\frac{\pi}{17}\right)x - 1$ sont linéairement dépendants.
- (c) (Examen Juin 2022) On considère trois vecteurs x, y, z de $\mathbb{R}^5$, si le mineur formé par les trois premières lignes de $(x \ y \ z)$ est nul, alors les vecteurs sont linéairement dépendants.
- (d) (Examen Juin 2021) Dans un $\mathbb{C}$ -vectoriel, les éléments x, y, z sont linéairement indépendants si et seulement si $2x, iy, (2+i)z$ sont linéairement indépendants.
- (e) (Examen Janvier 2020) Si des vecteurs $u_1, \dots, u_k$ sont linéairement dépendants, on peut trouver un vecteur z tel que $u_1, \dots, u_k, z$ soient linéairement indépendants.

Exercice 6.10. Déterminer si les polynômes

$$P(X) = X^3 + 4X^2 - 2X + 3, \quad Q(X) = X^3 + 6X^2 - X + 4 \quad \text{et} \quad R(X) = 3X^3 + 8X^2 - 8X + 7$$

sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 6.11. Dans l'espace vectoriel des fonctions continues réelles $C^0(\mathbb{R})$, étudier l'indépendance linéaire de

$$f = m + \cos + \sin, \quad g = 1 + m \cos + \sin \quad \text{et} \quad h = 1 + \cos + m \sin,$$

où m est un paramètre réel. Dans le cas éventuel où les fonctions sont linéairement dépendantes, exprimer une relation linéaire entre elles.

Exercice 6.12. Considérons $\mathbb{R}_{\leq 3}[X]$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 à coefficients dans $\mathbb{R}$.

- (a) Démontrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, les polynômes $1, X - a, (X - a)^2$ et $(X - a)^3$ forment une base de $\mathbb{R}_{\leq 3}[X]$. Dans la suite, nous noterons $\mathcal{B}$ cette base.
- (b) Rechercher les composantes d'un élément quelconque dans $\mathcal{B}$.
- (c) Écrire la formule de changement de base de la base $\mathcal{B}' = (1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_{\leq 3}[X]$ à la base $\mathcal{B}$.

Exercice 6.13. Soit $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_n)$ une base d'un espace vectoriel E sur le champ $\mathbb{K}$.

- (a) Démontrer que les vecteurs

$$y_1 = x_1, y_2 = x_1 + x_2, \dots, y_n = \sum_{k=1}^n x_k$$

forment une base $\mathcal{B}'$ de E .

- (b) Établir la formule de changement de base permettant de passer de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

Exercice 6.14 (Examen Janvier 2023). Vérifier que les trois vecteurs suivants forment une base de $\mathbb{C}^3$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 2i \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les composantes, dans cette base, de

$$\begin{pmatrix} i \\ 3i \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6.15 (Examen Janvier 2019). Soient

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

des éléments de $\mathbb{R}^4$.

- (a) Montrer que u_1, u_2, u_3, u_4 forment une base U de $\mathbb{R}^4$.
- (b) On considère les éléments $w_1 = u_1 + u_2, w_2 = u_1 - u_3, w_3 = u_1 + u_2 + u_3, w_4 = u_2 - u_4$. On admet qu'ils forment une base W de $\mathbb{R}^4$. Donner la matrice de changement de bases pour passer de la base W à la base U .
- (c) Donner les composantes $3w_1 + w_2 - w_4$ dans la base W puis, dans la base U .

7 Espaces vectoriels (2)

Rappels

Définition 7.1 (VII.5.1, p. 133, version 2009-2010). Soit E un espace vectoriel. Un sous-ensemble non vide $F \subset E$ est un **sous-espace vectoriel** de E s'il contient les combinaisons linéaires de ses éléments.

Proposition 7.2 (VII.5.2, p. 133, version 2009-2010). Soit E un espace vectoriel sur le champ $\mathbb{K}$. Un sous-ensemble $F \subseteq E$ est un sous-espace vectoriel de E si, et seulement si, les assertions suivantes sont vérifiées :

- (1) $0 \in F$,
- (2) si $x, y \in F$, alors $x + y \in F$,
- (3) si $x \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\lambda x \in F$.

Proposition 7.3 (VII.5.5, p. 134, version 2009-2010). Soit E un espace vectoriel de dimension finie n . Si F est un sous-espace vectoriel de E , alors F est de dimension finie, inférieure ou égale à n . De plus, si $\dim(F) = n$, alors $F = E$.

Proposition 7.4 (VII.5.7, p. 135, version 2009-2010). Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E et soit

$$H = \{f + g \mid f \in F, g \in G\}.$$

Alors H est un sous-espace vectoriel de E . Ce sous-espace H est appelé la somme de F et G et se note $F + G$.

Théorème 7.5 (VII.5.15, p. 137, version 2009-2010). Si F et G sont des sous-espaces vectoriels de dimension finie de E , alors

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Définition 7.6 (VII.5.16, p. 138, version 2009-2010). On dit que la somme $F + G$ de deux sous-espaces vectoriels F et G de E est **directe** si $F \cap G = \{0\}$. Auquel cas, on écrit $F \oplus G$.

Proposition 7.7 (VII.5.25, p. 141, version 2009-2010). La somme de p sous-espaces vectoriels $F_1, \dots, F_p$ de E est directe si et seulement si la somme de $F_2, \dots, F_p$ est directe ainsi que la somme de F_1 et $F_2 \oplus \dots \oplus F_p$. En particulier,

$$\dim(F_1 \oplus \dots \oplus F_p) = \dim F_1 + \dots + \dim F_p.$$

Exercices au tableau

Exercice 7.1. Soient

$$L = \{p \in \mathbb{C}_{\leq 2}[z] : \forall z \in \mathbb{C}_0, z^2 p\left(\frac{1}{z}\right) = p(z)\}$$

$$\text{et } M = \{p \in \mathbb{C}_{\leq 2}[z] : \forall z \in \mathbb{C}, p(z+1) = p(-z)\}$$

où $\mathbb{C}_{\leq 2}[z]$ est l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 2 à coefficients dans $\mathbb{C}$.

- (a) Montrer que L et M sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}_{\leq 2}[z]$.
- (b) Déterminer une base et la dimension de L , M , $L \cap M$ et $L + M$.

Exercice 7.2. Considérons $\mathbb{C}_{\leq 3}[z]$, l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 à coefficients dans $\mathbb{C}$. Soient

$$A = \{p \in \mathbb{C}_{\leq 3}[z] : p(0) = p(1) = p(2)\}, \quad B = \{D_z p : p \in A\} \quad \text{et} \quad C = \{D_z^2 p : p \in A\}.$$

- (a) Montrer que A, B et C sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}_{\leq 3}[z]$.
- (b) Déterminer une base et la dimension de chaque sous-espace vectoriel.
- (c) Démontrer que $\mathbb{C}_{\leq 3}[z] = A \oplus B \oplus C$.

Exercice 7.3. Soient

$$H_n = \{A \in \mathbb{C}_n^n : A^* = A\} \quad \text{et} \quad U_n = \{A \in \mathbb{C}_n^n : A^* = -A\}.$$

Démontrer, si possible, que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}_n^n$ et qu'on a $\mathbb{C}_n^n = H_n \oplus U_n$ lorsque $\mathbb{C}_n^n$ est vu

- (a) comme un $\mathbb{C}$ -vectoriel,
- (b) comme un $\mathbb{R}$ -vectoriel.

Exercice 7.4 (Partiel Janvier 2014). On se place dans $\mathbb{R}^4$ considéré comme $\mathbb{R}$ -vectoriel. On considère l'ensemble

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 = 0 \text{ et } x_1 - x_2 + x_4 = 0 \right\}$$

et le sous-espace vectoriel

$$G = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

- (a) Vérifier que F est un sous-espace vectoriel et en donner une base.
- (b) F et G sont-ils en somme directe ?
- (c) Trouver un supplémentaire de $F + G$.
- (d) Soit H le sous-espace vectoriel dont une base est donnée par

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

Donner une base de $H \cap F$ et une base de $H + F$.

Exercices en autonomie

Exercice 7.5. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$. On définit les ensembles

$$F = \{X \in \mathbb{R}_2^2 : AX = 0\}, \quad G = \{X \in \mathbb{R}_2^2 : XA = 0\} \quad \text{et} \quad H = \{X \in \mathbb{R}_2^2 : AX = XA\}.$$

- (a) Démontrer que F, G et H sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_2^2$. Donner ensuite une base et la dimension de chaque sous-espace.
- (b) Décrire $F \cap G, F \cap H$ et $G \cap H$. Démontrer que ces trois ensembles sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_2^2$. Donner ensuite une base et la dimension de chaque sous-espace.

Exercice 7.6. Considérons $\mathbb{C}_n^n$ comme un $\mathbb{C}$ -vectoriel. Soient

$$S_n = \{A \in \mathbb{C}_n^n : \tilde{A} = A\} \quad \text{et} \quad A_n = \{A \in \mathbb{C}_n^n : \tilde{A} = -A\}.$$

Démontrer que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}_n^n$ et qu'on a $\mathbb{C}_n^n = S_n \oplus A_n$.

Exercice 7.7. Soient A et B les parties de $\mathbb{R}^4$ définies par

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 0 \\ x_3 = x_4^2 + 1 \end{cases} \right\} \quad \text{et} \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Soient F et G les sous-espaces vectoriels engendrés respectivement par A et B . Démontrer que $F = G$.

Exercice 7.8. Soit $E = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ considéré comme $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Soient

$$P = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad I = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

Démontrer que $E = P \oplus I$.

Exercice 7.9 (Examen Juin 2023). Soit $E = \mathbb{C}_3^2$ le $\mathbb{C}$ -vectoriel des matrices complexes 2×3 . On considère les sous-vectoriels de E

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{C} \right\}, \quad G = \left\{ A \in \mathbb{C}_3^2 \mid A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$H = \{A \in \mathbb{C}_3^2 \mid (1 \ 1) A = (0 \ 0 \ 0)\}.$$

- Donner une base de F .
- Donner une base de H .
- Donner une base de $F \cap G$.
- Les sous-espaces F et H sont-ils en somme directe ? Justifier. En particulier, a-t-on $F \oplus H = \mathbb{C}_3^2$?
- Déduire** des points précédents si les espaces $F \cap G$ et H sont ou non en somme directe. En particulier, a-t-on $(F \cap G) \oplus H = \mathbb{C}_3^2$?

Exercice 7.10 (Examen Janvier 2021). On considère le $\mathbb{C}$ -vectoriel E des polynômes à coefficients complexes de degré au plus 4 et le sous-ensemble F suivant

$$F = \{az^4 + bz^3 + cz^2 + bz + a \mid a, b, c \in \mathbb{C}\}.$$

- Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de E .
- Donner une base de F et décomposer $2z^4 - z^3 - z + 2$ dans celle-ci.
- Quelle est l'intersection de F avec l'enveloppe linéaire

$$G = \langle z^4 + 1, z^3 + 1, z^2 + 1 \rangle ?$$

En déduire la dimension de $F + G$.

- Donner une base d'un supplémentaire de F dans E .

Exercice 7.11 (Partiel Janvier 2008). Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ -vectoriel E tels que $E = F \oplus G$. Soit $(e_1, \dots, e_k)$ une base de F . Montrer que, pour tout $g \in G$, $\rangle e_1 + g, \dots, e_k + g \langle$ est un supplémentaire de G dans E .

Exercice 7.12 (Partiel Janvier 2013). Soient E un $\mathbb{C}$ -vectoriel de dimension $n \geq 3$ et $e_1, \dots, e_n \in E$. On définit les vecteurs

$$t_j = e_j + e_{j+1} + e_{j+2}, \quad \forall j \in \{1, \dots, n-2\}$$

et $t_{n-1} = e_1 + e_{n-1} + e_n$, $t_n = e_1 + e_2 + e_n$.

- Pour $n = 5$, montrer que $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ est une base de E si, et seulement si, $\mathcal{B}' = \{t_1, \dots, t_n\}$ est une base de E .
- Pour $n = 5$, donner la matrice de changement de base pour passer de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

8 Systèmes linéaires

Rappels

Définition 8.1 (VI.1.1, p. 101, version 2009-2010). Soient $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $n \in \mathbb{N}$. Un **système d'équations linéaires** à n équations et p inconnues est un système de la forme

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}.$$

Sous forme matricielle, ce système s'écrit $Ax = b$, avec

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}_p^n, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^p, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n.$$

Définition 8.2 (VI.1.2, p. 101, version 2009-2010). Un système de la forme $Ax = b$ tel que $b = 0$ est dit **homogène**. Un système est **compatible** s'il possède au moins une solution. Sinon, il est dit **incompatible**. Si un système possède une et une seule solution, il est dit **déterminé**. S'il possède plus d'une solution, il est dit **indéterminé**. Enfin, deux systèmes sont **équivalents** s'ils possèdent les mêmes solutions.

Proposition 8.3 (VI.3.3, p. 104, version 2009-2010). Soient $A \in \mathbb{K}_p^n$ et $b \in \mathbb{K}^n$. Le système $Ax = b$ est compatible si, et seulement si, le rang de A est égal au rang de $(A|b)$.

Corollaire 8.4 (VI.3.6, p. 105, version 2009-2010). Si le système $(S)Ax = b$ est compatible, il est équivalent à tout système (S') obtenu en ne considérant que les lignes de la matrice A qui sont linéairement indépendantes et en nombre égal au rang de A .

Définition 8.5 (VI.4.2, p. 107, version 2009-2010). Un système $(S)Ax = b$ est dit **de Cramer** si A est une matrice carrée inversible. Dans ce cas, $x = A^{-1}b$ et, pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$,

$$x_j = \frac{1}{\det(A)} \det(C_1 \cdots \underbrace{b}_{j^{\text{ème}} \text{ colonne}} \cdots C_p).$$

En résumé, x_j est le quotient du déterminant de la matrice A du système où on a remplacé la j^{e} colonne par le second membre b , par le déterminant de A . Ces formules sont appelées les **formules de G. Cramer**.

Exercices au tableau

Exercice 8.1. Résoudre les systèmes d'équations suivants :

$$(a) \begin{cases} 2x - 3y + 6z = 3 \\ 4x - y + z = 1 \\ 3x - 2y + 3z = 4 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} 5x + 2y - 3u - v = 11 \\ 5x - y + 5z - u - 2v = 2 \\ x - 2y + 4z + u - v = -5 \end{cases}$$

Exercice 8.2. Résoudre le système d'équations suivant en discutant selon les valeurs des paramètres réels a, b et c :

$$\begin{cases} ax + by = a + b \\ bx + ay = a + b \\ x + y = c \end{cases}.$$

Exercice 8.3 (Examen Janvier 2023). Soit le système suivant où $\lambda \in \mathbb{R}$ est un paramètre

$$\begin{cases} x + 3y - z &= 1 \\ x + y &= \lambda \\ 2x + 4y + \lambda z &= 0 \end{cases}.$$

- Étudier la compatibilité du système en fonction de la valeur de λ .
- Pour quelles valeurs de λ le système est-il de Cramer ? Dans ce cas, donner son unique solution (celle-ci peut faire intervenir λ).
- Donner explicitement l'ensemble des solutions quand le système n'est pas de Cramer.

Exercices en autonomie

Exercice 8.4. Résoudre les systèmes d'équations suivants :

$$(a) \begin{cases} 3y + z &= 2 \\ 2x + 5y &= 1 \\ -2x + y + 4z &= 3 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} -x + 2y + z + 3t &= 6 \\ 7x + 2y - 13z + 3t &= -24 \\ 3x + y - 5z - t &= -12 \end{cases}$$

Exercice 8.5. Résoudre les systèmes d'équations suivants en discutant selon les valeurs des paramètres réels a, b, c et d :

$$\begin{aligned} (a) \begin{cases} ax + by + z &= 1 \\ x + aby + z &= a \\ x + ay + z &= c \end{cases} & \quad (e) \begin{cases} ax + by + az &= a \\ ax + ay + bz &= b \\ bx + by + az &= c \\ bx + ay + bz &= d \end{cases} \\ (b) \begin{cases} ax + by + cz &= 1 \\ x + y + z &= c \end{cases} & \quad (f) \begin{cases} ay - bz &= a^2 + b^2 \\ -ax + az &= 0 \\ bx - ay &= -a^2 - b^2 \\ x + z &= c \end{cases} \\ (c) \begin{cases} ax + by + bz + at &= 1 \\ bx + ay + az + bt &= 1 \\ x + y + z + t &= c \end{cases} & \\ (d) \begin{cases} x + y + z &= b \\ ax + by + bz &= a^2 \\ ax + cy + dz &= ab \end{cases} & \end{aligned}$$

Exercice 8.6 (Examen Juin 2023). Soit le système suivant où $\lambda \in \mathbb{R}$ est un paramètre

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + \lambda x_4 &= 1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - \lambda x_4 &= \lambda \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + \lambda x_4 &= 0 \end{cases}.$$

- Pour quelle(s) valeur(s) de λ le système est-il compatible ?
- Décrire l'ensemble des solutions du système quand $\lambda = 16$. En particulier, quelle est la dimension de l'ensemble des solutions du système homogène associé ?

Exercice 8.7 (Examen Juin 2022 – Physique). Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ \beta & -1 & \beta - 1 & 3 \\ \beta & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Calculer le déterminant de M .
- Étudier le rang de M en fonction du paramètre complexe β .
- Quand le système suivant est-il compatible (on ne demande pas de le résoudre) ?

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot M \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8.8 (Examen Janvier 2024). Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Le système

$$\begin{cases} ax + y + z &= 1 \\ x + by + z &= 1 \\ x + y + cz &= 1 \end{cases}$$

a une unique solution sauf si $a = b = c = 1$. Vrai ou faux ? Justifier.

Exercice 8.9. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit le système d'équations

$$\begin{cases} 2x - y + 3z + \lambda t &= 1 \\ 3y - 3z + \lambda t &= 0 \\ -x - 3y + 2z - \lambda t &= \lambda \end{cases},$$

dont les inconnues sont $x, y, z, t \in \mathbb{R}$.

- (a) Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre λ le système est-il compatible ?
- (b) Résoudre le système lorsque $\lambda = -1$.

Exercice 8.10. On considère un paramètre $\beta \in \mathbb{C}$ ainsi que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -\beta \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & \beta & \beta - 3 \end{pmatrix}.$$

- (a) Déterminer le rang de A en fonction du paramètre β .
- (b) En déduire pour quelle(s) valeur(s) de β le système suivant est compatible :

$$\begin{cases} x + 2y - \beta z &= 1 - \beta \\ 3y + 5z &= 1 - \beta \\ x + \beta y + (\beta - 3)z &= 0 \end{cases}.$$

- (c) Pour quelle(s) valeur(s) de β le système admet-il une solution unique ? Justifier.